
Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1

Florian Modler · Martin Kreh

Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1

Mathematik von Studenten für
Studenten erklärt und kommentiert

4. Auflage

 Springer Spektrum

Florian Modler
Hannover, Deutschland

Martin Kreh
University of Hildesheim
Hildesheim, Deutschland

ISBN 978-3-662-56751-7

ISBN 978-3-662-56752-4 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-56752-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2010, 2011, 2014, 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Andreas Rüdinger

Zeichnungen: Thomas Epp, Marco Daniel

Einbandabbildung: Carolyn Hall

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort zur 4. Auflage

Nun ist die letzte Auflage doch tatsächlich schon fünf Jahre her... höchste Zeit für ein paar Neuerungen! Für diese 4. Auflage haben wir wieder ein paar Fehler ausgebessert (die wollen einfach nicht alle auf einmal verschwinden). Vielen Dank auch hier wieder unseren fleißigen Lesern, die uns auf Fehler aufmerksam gemacht haben. Natürlich sind Fehlerbehebungen aber nicht das einzige neue. Wir haben einige neue Beispiele eingebaut, vor allem zur Integration, aber auch in einigen anderen Kapiteln. Außerdem stellen wir euch jeweils eine Probeklausur zur Analysis und zur Linearen Algebra zur Verfügung, damit ihr euer erworbenes Wissen testen könnt.

Wir hoffen euch damit noch besser vorbereiten zu können und wünschen nun viel Spaß beim Lesen – und vor allem viel Erfolg bei der Klausur!

Hannover und Hildesheim
März 2018

Florian Modler
Martin Kreh

Vorwort zur 3. Auflage

Das ist nun schon die dritte Auflage von „Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1“. Wir freuen uns, dass wir bisher so vielen Studenten helfen konnten.

Ein paar Dinge haben wir für diese 3. Auflage geändert. Und zwar ist uns aufgefallen, dass wir noch nichts über Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit erzählt haben. Dies holen wir schleunigst nach! Außerdem haben wir einige Tatsachen über die Exponentialfunktion, die Stirlingsche Formel sowie etwas zur Cramerschen Regel ergänzt. Das alte Kapitel über Homomorphismen haben wir in das Kapitel über Gruppen, Ringe und Körper integriert, also nicht wundern ;-). Außerdem sind noch einige weitere Sätze in verschiedenen Kapiteln ergänzt worden.

Ansonsten wurden noch einige kleinere Fehler verbessert. An dieser Stelle nochmal ein großes Dankeschön an alle, die uns Fehler gemeldet haben!

Nun aber genug der großen Rede. Wir wünschen euch viel Spaß mit der 3. Auflage des Buches!

Hannover und Göttingen
Januar 2013

Florian Modler
Martin Kreh

Vorwort zur 2. Auflage

Wir hätten niemals gedacht, dass „Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1“ so erfolgreich werden würde. Umso mehr freut es uns, dass wir vielen Anfängern unter die Arme greifen und helfen konnten. Damit dies auch so bleibt, erscheint nun die 2. Auflage zum Buch. Korrigierte Nachdrucke gab es schon; nun ist eine neue Auflage an der Reihe. Wir haben einiges verändert. So sind beispielsweise FAQs, also häufig gestellte Fragen zum Mathematikstudium mit Antworten von uns hinzugekommen. Wir behandeln Themen wie: wie man die ersten Tage im Studium übersteht oder wie man die Übungsblätter am besten bearbeitet.

Des Weiteren haben wir ein wenig im Buch selbst hinzugefügt, Teile ergänzt und noch ein paar Kleinigkeiten verbessert. Wir möchten uns deshalb an dieser Stelle bei allen bedanken, die uns Verbesserungsvorschläge geschickt und uns aber auch mit Lob und Kritik beglückt haben. Besonders sei dabei Herr Dr. Dr. h. c. Norbert Herrmann genannt, der uns bei vielen kleinen Verbesserungen geholfen und gute Hinweise gegeben hat. Ein weiterer besonderer Dank geht an Dominik Bilitewski und Martin Zubler, die uns ebenfalls mit sehr guten Anmerkungen und einer sehr ausführlichen Fehlersuche geholfen haben. Leider können wir aber nicht alle namentlich erwähnen. Aber wir sagen allen, die sich jetzt angesprochen fühlen: Danke!

Nun aber genug der großen Rede. Wir wünschen euch viel Spaß mit der 2. Auflage des Buches!

Hannover und Göttingen
Mai 2011

Florian Modler
Martin Kreh

Vorwort zur 1. Auflage

Wieso dieses Buch?

Wenn ihr dieses Buch in den Händen haltet, werdet ihr euch vielleicht fragen, wieso wir den Markt mit einem weiteren Buch zur Analysis 1 und zur Linearen Algebra 1 erweitern. Die Frage ist berechtigt. Gerade in Anbetracht der Tatsache, dass es wirklich schon eine Menge guter Lehrbücher zu diesen Anfängervorlesungen gibt. Wir wollen daher versuchen, unser Konzept, unsere Idee und letztendlich das Buch zu beschreiben. Denn dieses Buch ist anders als alle anderen Bücher, die ihr zu den Anfängervorlesungen kennt. Es geht schon bei den Autoren los. Wir sind (noch) keine ausgebildeten Mathematiker, sondern noch „mathematische Babys“. Also können wir, so jedenfalls unsere Meinung, die Schwierigkeiten von Anfängern noch besser einschätzen als so mancher Professor, der sich schon sehr weit von den Studenten und deren Anfängerschwierigkeiten entfernt hat.

Gebrauchsanleitung

Der zweite Unterschied zu anderen klassischen Lehrbüchern besteht im Aufbau. Das Buch ist kapitelweise zweigeteilt. Im ersten Teil, gekennzeichnet durch die Kapitelüberschriften „Definitionen“ und „Sätze und Beweise“ stellen wir euch alle wichtigen Definitionen und Sätze zur Verfügung, die ihr zum Beispiel für eine Prüfung einfach draufhaben müsst. Des Weiteren findet ihr dort auch die Beweise zu wichtigen Sätzen, damit ihr die Denkweise von Beweisen versteht, was sehr wichtig ist. Überspringt diese beim Lesen des Buches auf keinen Fall, auch wenn ihr denkt, dass ihr diese nicht braucht. Das ist Quatsch. Ihr studiert Mathematik, und was ist denn das Schöne an der Mathematik? Doch wohl die Beweise ;-). In diesem ersten Teil ist also alles sehr streng mathematisch.

Im zweiten Teil, gekennzeichnet durch die Kapitelüberschriften „Erklärungen zu den Definitionen“ und „Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen“, erklären und kommentieren wir die Definitionen, Sätze und Beweise aus dem ersten Teil mit vielen Abbildungen und Beispielen. Dieser Teil ist eher als eine Art Tutori-

um zu verstehen, in dem wir die Begriffe motivieren und vor allem, so hoffen wir jedenfalls, verständlich erklären und die schwierige mathematische Strenge etwas mit Leben füllen. Solltet ihr also irgendeine Definition in der Vorlesung nicht auf Anhieb verstehen, schlagt ihr einfach im zweiten Teil nach und lest die Erklärungen.

Solch einen Aufbau gibt es noch in keinem Lehrbuch, und wir hoffen, dass wir damit vielen Studenten, die am Anfang Schwierigkeiten haben, bestens helfen können. Wichtig ist uns aber auch, dass ihr neben diesem Buch noch andere Bücher zur Mathematik lest, gerade weil unser Aufbau nicht klassisch ist (An einigen Stellen benötigen wir Begriffe, die erst in späteren Kapiteln kommen. Wir verweisen aber immer auf die entsprechenden Stellen, sodass man bequem nachlesen kann), und ihr euch dennoch an den „herkömmlichen“ Lehrbuch-Stil gewöhnen sollt. Es soll eher begleitend zur Vorlesung eingesetzt werden.

Inhalt

Der Inhalt ist dagegen klassisch. Wir haben versucht, alle wichtigen Definitionen und Sätze in das Buch mit aufzunehmen, die in einer Analysis-1- und Linearen-Algebra-1-Vorlesung vorkommen und behandelt werden. Zunächst geben wir im ersten Teil „Grundlagen“ wichtige Begriffe an, die ihr sowohl in der Analysis als auch in der Linearen Algebra immer wieder braucht.

Im Analysis-Teil geht es danach mit Folgen und Reihen los. Weiter schreiten wir zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit und beenden den Teil mit Integralen und Funktionenfolgen.

Im Abschnitt über Lineare Algebra starten wir erst harmlos mit dem Lösen von linearen Gleichungssystemen und gehen danach sofort zu den wichtigen linearen Abbildungen und den Modellen der Linearen Algebra über. Dieser Teil wird durch ein Kapitel über das Diagonalisieren von Matrizen und wichtigen Anwendungen abgeschlossen.

Natürlich wollen wir betonen, dass wir beim Schreiben des Buches Mut zur Lücke gezeigt haben, denn wir wollten das Buch nicht überladen und wirklich nur wichtige Dinge aufnehmen. Wir hoffen, dass uns dies gelingen ist.

Das Buch enthält keinen Extraabschnitt mit Übungsaufgaben, aber wir haben einige Aufgaben im laufenden Text eingestreut. Als wir noch im ersten Semester waren, haben wir uns darüber immer geärgert, wenn in einem Buch plötzlich stand: „Dies überlassen wir dem Leser als leichte Übungsaufgabe“. Aber glaubt uns: Blicken wir nun als Viertsemestler zurück, so sind wir froh, dass dies in diesen Büchern stand. Denn ihr solltet diesen Satz keinesfalls als Schikane ansehen, sondern nehmt die Herausforderung an und löst alle Übungsaufgaben, die im Buch verteilt sind, denn nur dadurch kann man sich selbst überprüfen, ob man den Stoff verstanden hat. Vielfach ist es nämlich so, dass man denkt, man hätte alles verstanden, aber blickt man dann auf eine Aufgabe, so steht man plötzlich auf dem Schlauch. Also ran an die Aufgaben!

Die Website zum Buch

Wir haben auch eine Website zum Buch eingerichtet. Diese ist unter der folgenden URL zu erreichen:

<http://www.mathestudium-tutor.de>¹

Diese Homepage soll dazu dienen, dass ihr Fragen zum Buch stellen könnt, wenn ihr irgendeine Stelle im Buch nicht verstanden habt oder ähnliches. Wir wollen aber darauf hinweisen, dass die Website bzw. das Forum nicht als Hausaufgabenhilfe genutzt werden kann. Es werden dort nur Fragen zum Buch beantwortet. Hausaufgabenhilfe bekommt ihr in anderen Foren, aber nicht bei uns. Weiterhin sollen auf dieser Homepage Hinweise auf Fehler gesammelt werden, die sich mit Sicherheit ins Buch eingeschlichen haben, denn der Fehlerteufel schläft bekanntlich nie. Auch Bonusmaterial, das keinen Platz mehr im Buch gefunden hat, wird dort zu finden sein, ebenso wie Hilfestellungen zu den Übungen, die wir im Buch verstreut haben (falls ihr die Hilfe benötigt). Außerdem würden wir uns freuen, wenn sich so eine Community zu unserem Buch entwickeln würde und wir euch sicher durch das erste Semester bringen können. Über konstruktive Kritik jeglicher Art freuen wir uns dann natürlich auch :-).

Danksagung

Ein Buch ist immer nur so gut, wie die Helfer, die zum Entstehen des Buches beigetragen haben, und das sind bei Weitem nicht nur die Autoren. Wir hatten von diesen Helfern zum Glück sehr viele, und daher wird auch die Danksagung etwas länger ausfallen, denn ohne diese fleißigen Freunde, Bekannten und Mitarbeiter der Leibniz Universität Hannover wäre das Buch nicht so, wie ihr es gerade in euren Händen haltet. Wir haben eine Menge Leuten zu danken und hoffen, dass wir im Folgenden niemanden vergessen. Wenn dies trotzdem der Fall sein sollte, dann bitten wir dies zu entschuldigen und danken ihm/ihr trotzdem.

Da hätten wir einerseits unsere Korrekturleser Dr. Florian Leydecker, Stefan Keil, Stefan Hasselmann, Christoph Fuest, Dr. Dr. h. c. Norbert Herrmann, Prof. Dr. Stefan Wewers und Arne Böttger, die uns auf viele kleinere und größere Ungeheimheiten und Fehler aufmerksam gemacht haben und die auch unter Zeitdruck alles andere verschoben haben, um erst einmal unser Manuskript zu lesen. Dafür sei allen herzlich gedankt.

Ein ganz großer Dank geht auch an Marco Daniel, der uns mit seinem unbegrenzten Wissen über L^AT_EX beim Erstellen des Textsatzes sehr unterstützt hat und auch nachts um vier Uhr noch bereit war, auf Fragen zu antworten und zu helfen. An dieser Stelle muss aber auch seiner Frau gedankt werden, die so oft auf ihn verzichten musste.

¹ Diese Webseite existiert inzwischen nicht mehr, hier könnt ihr also leider keine Fragen stellen. Ihr dürft uns aber gerne weiterhin eine Mail schreiben.

Weiterhin sei Carolyn Hall gedankt, die nach unseren Vorschlägen, die noch sehr schwammig und nicht gerade aussagekräftig waren, dieses wundervolle Coverbild erstellt hat, das ihr nun bewundern könnt.

Ein weiterer Dank geht an folgende Studenten, die das Buch vor dem Erscheinen daraufhin getestet haben, ob der Text für Erstsemestler auch geeignet ist: Katharina-Sophie Isleif, Simon Golchin-Nik, Susanne Begerow, Fabian Grünig, Mareike Antrick, Wiebke Telle, Helge Reddig, Nadine Geldermann und Esmere Krasniqi. Dank gebührt auch Georg Lauenstein, mit dem ich vor einigen Jahren etwas zu den Beweisverfahren geschrieben hatte. Hierauf basiert das Kap. 5 zu den Beweistechniken.

Ebenso danken wir Thomas Epp, der diese sehr gelungenen Grafiken im Buch erstellt hat und Susanne Hensel, Heidemarie Wolter und Bernhard Gerl für die umfangreichen Korrekturen!

Außerdem danken wir allen Studenten, die uns Hinweise dazu gegeben haben, was in dem Buch auf jeden Fall enthalten sein soll und was wir unbedingt ausführlich erklären sollen. Ein besonderer Dank geht an dieser Stelle an die Studenten, die am Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 im Wintersemester 08/09 beim Autor Florian Modler teilgenommen haben und damit uns Autoren mit den gut gestellten Fragen viele Hinweise für die Konzeption einzelner Kapitel gegeben haben.

Jetzt bleiben noch zwei Personenkreise übrig, denen wir danken möchten. Zum einen unseren Freunden, Bekannten und Familien, die des Öfteren auf uns, besonders in der letzten heißen Phase des Schreibens, verzichten mussten, da wir doch eher am Buch schreiben wollten als irgendetwas anderes zu machen, und zum anderen geht ein sehr großer Dank an den Spektrum-Verlag, vor allem an unsere Lektoren Dr. Andreas Rüdinger und Anja Groth, die das Projekt während der gesamten Zeit und der Entstehungsphase begleitet und vorbildlich betreut haben. Jede E-Mail wurde sofort beantwortet, und glaubt uns, das waren einige. Vielen Dank für die sehr schöne, fast familiäre Zusammenarbeit, die uns sehr viel Spaß gebracht hat.

Und nun genug der Danksagung, viel Spaß mit unserem Buch!

Hannover
Juli 2009

Florian Modler
Martin Kreh

Häufig gestellte Fragen zum Mathematikstudium

Bevor wir richtig mit dem Stoff zur Analysis 1 und Linearen Algebra 1 starten wollen, solltet ihr euch klar sein, worauf ihr euch einlasst. Daher hier ein paar typische Fragen, die im ersten Semester aufkommen und die wir so gut wie möglich zu beantworten versuchen.

Die ersten Tage

Fängt man an, Mathematik zu studieren, so ist am Anfang alles neu und sehr ungewohnt. Es stellt sich die Frage, wie ihr die ersten Tage und Wochen geschickt überstehen könnt. Denn eins ist klar: Studium ist anders als Schule. Es ist natürlich anspruchsvoller und erfordert viel Selbststudium, Eigenverantwortung und Disziplin. Aber unserer Meinung nach ist Studium wesentlich schöner, und man ist freier in seiner Gestaltungsvielfalt. Dennoch müsst ihr euch zunächst einmal hineindenken und mit der ungewöhnlich neuen Situation zurechtkommen. Dies dauert seine Zeit, aber wenn es erst einmal geschafft ist, könnt ihr das Mathestudium genießen :-). Wir wollen hier einige typische Erstsemesterfragen beantworten und euch die Angst ein wenig nehmen.

Wie überstehe ich ganz alleine die ersten Tage?

Alleine kann man nicht studieren. Sowohl aus fachlichen als auch aus sozialen Gründen ist es sehr wichtig, schnell neue Leute zu finden und sich eine gute Übungsgruppe aufzubauen. Geht einfach auf die Leute zu, denn bedenkt, dass alle Erstsemester Anfänger sind und genauso Kontakte und neue Freunde suchen wie ihr selbst. Und es gibt doch diesen Spruch: „Geteiltes Leid ist halbes Leid“. Bei der Wahl eurer Übungsgruppe solltet ihr allerdings beachten, dass ihr miteinander harmoniert und dass die Übungsgruppe nicht zu anspruchsvoll, aber auch nicht zu leicht für euch ist. Es ist ganz gut, wenn die Gruppe auf einem relativ gleichen Niveau arbeiten kann, ohne dass ihr euch über- oder unterfordert fühlt.

Sicherlich ist aber auch ein Messen mit den anderen als Motivations Schub nicht gerade schlecht.

Soll ich die Übungsblätter bearbeiten?

Eine etwas provokante Frage: Jede Woche werdet ihr pro Vorlesung ein Übungsblatt bekommen, das ihr innerhalb einer Woche lösen müsst und das sehr viel Zeit in Anspruch nehmen wird. Es ist von großer Bedeutung, über die Aufgaben des wöchentlichen Übungsblattes zu sprechen. Versucht die Aufgaben vielleicht erst einmal alleine zu lösen. Aber sprecht auf jeden Fall die Übungsaufgaben in eurer Gruppe durch. Diskutiert über die Aufgaben und über die Mathematik! Vor allem durch das intensive Sprechen kommt einem die ein oder andere Idee, die man vorher nicht hatte. Oder man lässt sich durch die Ideen der anderen motivieren und inspirieren.

Das Wichtigste überhaupt ist aber das regelmäßige Bearbeiten der Übungszettel! Denkt nicht: „Ach, schreibe ich die Lösungen einfach bei irgendwem ab, um meine Punkte zu bekommen“. Unter uns: Wenn es knapp wird mit den Punkten, dann könnt ihr das zur Not am Ende immer noch machen. Aber zunächst **müsst** ihr die Aufgaben selbst lösen. Auch wenn ihr denkt, ihr hättet in der Vorlesung alles verstanden, werdet ihr sehen, dass ihr doch bei der einen oder anderen Übungsaufgabe stocken werdet. Vielleicht schaut ihr auf euren Zettel und denkt: „War ich die Woche über gar nicht in der Vorlesung?“ Ich kenne viele Studenten, die es jetzt bereuen, dass sie im ersten Semester die Lösungen von anderen abgeschrieben und nicht selber gegrübelt haben. Die Grundlagen fehlen einfach, und dies rächt sich im Laufe des Studiums, auch wenn ihr die ersten Klausuren gut überstehen solltet.

Was ihr bei den Übungszetteln braucht, ist vor allem Durchhaltevermögen. Die meisten Studenten werden an den Aufgaben zu knabbern haben, und teilweise auch verzweifeln. Das ist nicht schlimm. Man kann nicht alles sofort lösen, aber wichtig ist, es zu versuchen, und wenn ihr es dann nach vier Stunden schafft, ist das Erfolgserlebnis gleich viermal so groß.

Es ist nicht nur das logische Denken, was im Mathematikstudium antrainiert wird, sondern vor allem das An-seine-Grenzen-stoßen und noch einen Schritt darüber hinaus zu gehen.

Darf ich in einer Vorlesung oder Übung eine Frage stellen?

Viele Studenten fragen leider viel zu selten. Das liegt unseres Erachtens wohl daran, dass sie sich nicht trauen, Fragen zu stellen. Habt keine Angst vor dem Professor oder den Übungsleitern. Fragt, was das Zeug hält. Bombadiert sie mit E-Mails oder geht in die Sprechstunde. Es darf nicht sein, dass die Professoren in der Sprechstunde nichts zu tun haben. Ein Professor hat uns mal erzählt, dass er in der Zeit, in der er Sprechstunde hat, am besten arbeiten kann, weil er weiß, dass sowieso keiner kommt. Erst wenn ihr Fragen formulieren könnt, dann zeigt ihr, dass ihr auf dem richtigen Weg seid, die Materie zu verstehen und zu durchdringen. Traut euch. Habt keine Scheu :-)!

Sollte ich nebenbei Fachliteratur lesen?

Na ja, wenn ihr diese Zeilen lest, dann zeigt das ja schon mal, dass ihr neben der Vorlesung noch weitere Fachbücher lest. Aber Spaß beiseite: Es ist schon wichtig, neben der Vorlesung, gerade wenn ihr im Studium fortschreitet, Fachliteratur

ergänzend zur Vorlesung zu lesen. Vielleicht auch einfach nur deshalb, um noch einmal eine andere Erklärung zu erhalten oder um über den Vorlesungsstoff hinauszuschauen, denn leider kann ein Professor in einer Vorlesung nicht alles Interessante angeben. Studium ist nämlich nicht nur Sammeln von Punkten und Prüfungsleistungen, sondern auch den Interessen nachgehen; nicht nur Vorlesungen zu hören, weil ihr den Schein braucht, sondern weil es euch interessiert ;-).

Habe ich neben einem Mathematikstudium überhaupt noch Freizeit?

Ja, die solltet ihr euch nehmen! Ein guter Ausgleich neben dem Mathestudium ist auch sehr wichtig. Dieser Ausgleich kann sportlicher Natur sein - nutzt beispielsweise das Unisportprogramm, sollte es so etwas an eurer Universität geben - oder darin bestehen, ein gutes Buch zu lesen, oder was auch immer. Man sollte aber versuchen, nicht die ganze Woche nur in Mathematik zu investieren. Klar, das Studium erfordert sehr viel Zeit, aber nehmt euch auch freie Zeit für euch. Für eure Hobbies, für eure anderen Interessen, für Freunde und all das, was ihr sonst noch so gerne macht.

Wie merke ich, ob das Mathematikstudium das Richtige für mich ist?

Ihr werdet im Laufe des ersten Semesters merken, dass sich die Reihen in dem erst vielleicht überfüllten Hörsaal schnell lichten werden. Das liegt einfach daran, dass das Mathematikstudium nicht jedem liegt. Nicht jeder kann Mathematiker werden. Das ist auch gut und richtig so. Die Frage ist natürlich, wie ich persönlich merke, ob ich ein Mathematiker werden kann oder nicht. Dies ist eine sehr schwere Frage, die nicht so leicht zu beantworten ist. Es kommt drauf an. Es gibt einige, die Schwierigkeiten haben, aber eigentlich sehr gute Mathematiker sind. Bei anderen wiederum bleiben diese Startschwierigkeiten die ganze Zeit. Eins sollte aber für alle gelten: Man sollte ein wenig Spaß am Studium finden. Wenn sich dies nicht irgendwann einstellt, sollte man über einen Abbruch nachdenken... Eine zu frühe Entscheidung kann aber auch fatal sein, denn irgendwann vertieft man sich in einem Bereich, beispielsweise Analysis, Stochastik, Algebra, Differentialgeometrie oder ähnliche, und merkt vielleicht erst dann, dass Mathe doch nicht so schlimm ist und auch Spaß machen kann.

Wie und wie lange bereite ich mich auf eine Klausur vor?

Grundsätzlich gilt erst einmal, dass man während des Semesters immer kontinuierlich mitarbeiten sollte, das bedeutet: Vorlesungsstoff gründlich nacharbeiten und vor allem verstehen und die Übungsaufgaben auch nicht nur abschreiben, sondern selbst lösen und bei jeder Unklarheit seinen Professor, den Übungsleiter oder seine Kommilitonen um Rat fragen. Dann hat man für die Vorbereitung der Klausur erst einmal weniger zu tun, als wenn man das gesamte Semester über nichts macht. Grundsätzlich gilt aber auch, dass es nicht ausreicht, sich einen Tag vor der Klausur hinzusetzen und den Stoff einmal anzuschauen, so wie dies vielleicht einige von euch in der Schule für Klausuren gemacht haben. Denn ihr werdet schnell merken, dass der Stoff aufwendiger ist.

Zusammenfassend gilt also: Arbeitet ständig und fleißig während des Semesters mit, versteht unbedingt den Stoff, lernt nicht nur Schema F. Dies wird euch in der Klausur nicht allzu viel nützen (nur bei einigen Standardaufgaben), aber beim Beweisen müsst ihr die Materie durchdrungen und verinnerlicht haben. Rechnet die Übungsaufgaben noch einmal und fangt rechtzeitig mit der Vorbereitung an.

Zusammenfassend: Das Studium wird neu und ungewohnt sein, aber ihr werdet euch bestimmt schnell daran gewöhnen, und dann wird man das Studentenleben lieben.

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen

1	Logik und mathematische Grundbegriffe	3
1.1	Definitionen	3
1.2	Erklärungen zu den Definitionen	4
2	Mengen	13
2.1	Definitionen	13
2.2	Sätze und Beweise	17
2.3	Erklärungen zu den Definitionen	20
2.4	Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	31
3	Abbildungen und Relationen	33
3.1	Definitionen	33
3.2	Sätze und Beweise	35
3.3	Erklärungen zu den Definitionen	37
3.4	Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	45
4	Zahlen	49
4.1	Definitionen	49
4.2	Sätze und Beweise	52
4.3	Erklärungen zu den Definitionen	56
4.4	Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	63
5	Beweistechniken	67
5.1	Drei wichtige Beweistechniken	67
5.2	Erklärungen zu den Beweistechniken	68
6	Gruppen, Ringe, Körper	91
6.1	Definitionen	91
6.2	Sätze und Beweise	94
6.3	Erklärungen zu den Definitionen	96
6.4	Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	105

Analysis

7	Reelle Zahlen	109
	7.1 Definitionen	109
	7.2 Sätze und Beweise	110
	7.3 Erklärungen zu den Definitionen	114
	7.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	116
8	Folgen	119
	8.1 Definitionen	119
	8.2 Sätze und Beweise	121
	8.3 Erklärungen zu den Definitionen	126
	8.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	133
9	Reihen	145
	9.1 Definitionen	145
	9.2 Sätze und Beweise	148
	9.3 Erklärungen zu den Definitionen	159
	9.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	167
10	Grenzwerte und Stetigkeit	177
	10.1 Definitionen	177
	10.2 Sätze und Beweise	179
	10.3 Erklärungen zu den Definitionen	182
	10.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	198
11	Differenzierbarkeit	203
	11.1 Definitionen	203
	11.2 Sätze und Beweise	206
	11.3 Erklärungen zu den Definitionen	212
	11.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	221
12	Das Riemann-Integral	231
	12.1 Definitionen	231
	12.2 Sätze und Beweise	234
	12.3 Erklärungen zu den Definitionen	242
	12.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	244
13	Konvergenz von Funktionenfolgen	263
	13.1 Definitionen	263
	13.2 Sätze und Beweise	264
	13.3 Erklärungen zu den Definitionen	265
	13.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	266

14	Probeklausur Analysis	271
	14.1 Hinweise	272
	14.2 Klausur	274
	14.3 Musterlösung	276

Lineare Algebra

15	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	283
	15.1 Definitionen	283
	15.2 Sätze und Beweise	287
	15.3 Erklärungen zu den Definitionen	292
	15.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	303
16	Eigenschaften von Matrizen	315
	16.1 Definitionen	315
	16.2 Sätze und Beweise	316
	16.3 Erklärungen zu den Definitionen	318
	16.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	326
17	Vektorräume	333
	17.1 Definitionen	333
	17.2 Sätze und Beweise	336
	17.3 Erklärungen zu den Definitionen	339
	17.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	349
18	Lineare Abbildungen	355
	18.1 Definitionen	355
	18.2 Sätze und Beweise	357
	18.3 Erklärungen zu den Definitionen	359
	18.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	375
19	Homomorphismen	383
	19.1 Definitionen	383
	19.2 Sätze und Beweise	384
	19.3 Erklärungen zu den Definitionen	385
	19.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	389
20	Permutationen	391
	20.1 Definitionen	391
	20.2 Sätze und Beweise	392
	20.3 Erklärungen zu den Definitionen	394
	20.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	397

21	Determinante	401
	21.1 Definitionen	401
	21.2 Sätze und Beweise	402
	21.3 Erklärungen zu den Definitionen	405
	21.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	405
22	Diagonalisieren und Eigenwerttheorie	417
	22.1 Definitionen	417
	22.2 Sätze und Beweise	418
	22.3 Erklärungen zu den Definitionen	421
	22.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen	425
23	Probeklausur Lineare Algebra	433
	23.1 Hinweise	433
	23.2 Klausur	434
	23.3 Musterlösung	436
	Symbolverzeichnis	441
	Literatur	443
	Index	445