

Denken in Strukturen und seine Geschichte

Josef Honerkamp

Denken in Strukturen und seine Geschichte

Von der Kraft des
mathematischen Beweises

 Springer

Josef Honerkamp
Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Freiburg
Freiburg, Deutschland

ISBN 978-3-662-56376-2 ISBN 978-3-662-56377-9 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-56377-9>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Umschlag: deblik, Berlin
Verantwortlich im Verlag: Andreas Rüdinger

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Wissenschaft ist nicht nur eine Sammlung von mehr oder weniger anerkannten Aussagen, sondern ein durchstrukturiertes Gedankengebäude. Alle Aussagen stehen darin in einer logischen Beziehung zueinander und sind letztlich auf gewisse Grundannahmen zurückzuführen. In meinem letzten Buch *Die Idee der Wissenschaft* (Honerkamp 2016) habe ich dies ausführlich dargelegt, die Geschichte dieser Idee beleuchtet und an drei Gebieten, an der Physik, der Rechtswissenschaft und der Theologie, geprüft, in welcher Form diese Idee verwirklicht worden ist oder werden kann. Da bleibt es wohl nicht aus, dass man irgendwann näher hinschaut auf das Gebiet, in dem diese Idee vor mehr als 2000 Jahren entstanden ist, dort seither „zu Hause“ ist und in dem sich die Kraft dieser Idee am frühesten und am besten zeigen konnte. Dieses Gebiet ist die Mathematik.

Mathematik gilt unumstritten als Königin der Wissenschaften. Leider mögen sich die meisten Menschen ihr nicht nähern. Man sagt, sie sei schwierig und auch streng – und mit zunehmendem Alter sei sie immer strenger und komplizierter geworden. Dabei ist sie sehr vital, auch wenn sie die älteste unter allen Wissenschaften ist. Als theoretischer Physiker habe ich mich immer schon in ihrer Nähe aufgehalten – von ihrer Macht profitierend und von ihrer Schönheit begeistert. So kam ich auf den Gedanken, ein wenig vermitteln zu wollen, zwischen ihr und denen, die sie insgeheim bewundern, und denen, die sie näher kennen lernen möchten, aber nicht wissen, wie sie es anfangen sollen, sowie jenen, die schon einmal bei einem solchen Anlauf verzweifelt sind und es noch einmal versuchen wollen.

Wie auch immer diese Vermittlung gelingt, ich jedenfalls habe damit viel Mühe und Arbeit gehabt, möchte diese Erfahrung aber nicht missen, denn ich bin dadurch sehr bereichert worden. Dabei habe ich viel von Ratschlägen und Kritik meiner Kollegen, Freunde und Bekannten profitiert, sei es in schriftlichen Kommentaren oder in Gesprächen. Mein herzlicher Dank dafür gilt insbesondere Heinz-Dieter Ebbinghaus, der mir mit viel Geduld manche falschen Vorstellungen über Begriffe der mathematischen Logik austreiben musste, Sebastian Schuhmacher, der als Probeleser alle Kapitel kritisch auf Verständlichkeit geprüft hat, Gerold Prauss, mit dem ich in vielen Gesprächen über das Unendliche und das Kontinuum diskutieren konnte, und Gerhard Vollmer, der mich zu größter Genauigkeit in meinen Formulierungen anspornte. Für alle

Ungereimtheiten und Fehler, die sich noch in dem Buch finden lassen, bin ich natürlich alleine verantwortlich.

Die Betreuung bei der Veröffentlichung durch den Springer-Verlag durch Herrn Rüdinger, Direktor Naturwissenschaften, und Frau Anja Dochnal, Projekt Manager, war wieder sehr kompetent, angenehm und anregend.

Wie bei den vorhergehenden Büchern widme ich auch dieses Mal das Buch einem meiner Enkelkinder. Leander, zurzeit noch fünf Jahre, „liebt die Ordnung“, wie er mir vor Kurzem gestand. Da wird er wohl später auch das Denken in Strukturen schätzen und lieben, denn was ist dieses anderes, als eine Ordnung in den Gedanken herzustellen sowie in der Welt zu entdecken.

Emmendingen
im November 2017

Josef Honerkamp

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Denken in Geschichten	9
2.1	Intelligenztypen und Geschichten	10
2.2	Geschichten als Schule fürs Leben und als Gemeinschaftsbildung	12
2.3	Geschichten als Sinnstiftung	12
2.4	Freiheit der Gedanken beim Erfinden und Erzählen von Geschichten	13
2.5	Die andere Seite der Freiheit der Gedanken	14
2.6	Verführungen durch unsere Umgangssprache	18
2.7	Widersprüche: Antinomien, Paradoxien und Aporien	19

X	Inhaltsverzeichnis	
3	Der Begriff der Unendlichkeit	27
3.1	Erste Strukturierung des Begriffs bei Aristoteles	30
3.2	Der Begriff der Unendlichkeit im Denken in Geschichten	32
4	Anfänge des Denkens in Strukturen, unser antikes Erbe	39
4.1	Ursprünge der Geometrie und der Arithmetik	42
4.2	Die Ursprünge der Logik	66
4.3	Auf dem Weg zu einem axiomatisch-deduktiven System	71
4.4	Die <i>Elemente</i> von Euklid	74
4.5	Alexandria	80
5	Einflüsse von außen, Rezeption und Ausarbeitung	87
5.1	Die Welt außerhalb des christlich-islamischen Kulturkreises	89
5.2	Der islamische Kulturkreis	93
5.3	Das mittelalterliche Europa	97
6	Grundbegriffe strukturellen Denkens	105
6.1	Mengen	107
6.2	Relationen	112
6.3	Zahlen	129

7	Renaissance: Fortschritte und erste Anwendungen	143
7.1	Von der Geometrie zur analytischen Geometrie	144
7.2	Galilei und Newton: Mathematik für die Naturforschung	153
7.3	Infinitesimale bei Newton und Leibniz	163
 8	 Die Moderne: Axiomatisch-deduktive Systeme	 177
8.1	Das Vorbild Euklids, das Hilbert-Programm	179
8.2	Elementare Axiomensysteme	185
 9	 Mengen und der Begriff der Unendlichkeit	 217
9.1	Der Begriff der Menge	218
9.2	Die ZFC-Mengenlehre als Grundlage der Mathematik	228
9.3	Der Begriff der Unendlichkeit	229
 10	 Formale Systeme in formalen Sprachen	 269
10.1	Syntax der formalen Sprache 1. Stufe	270
10.2	Semantik	273
10.3	Schlussregeln, Beweis, Theorie, Theorem	281

XII	Inhaltsverzeichnis	
10.4	Widerspruchsfreiheit, Korrektheit, Vollständigkeit	288
10.5	Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze	290
11	Vom Nutzen formaler Sprachen	303
11.1	Künstliche neuronale Netze	306
11.2	Bestärkendes Lernen (Reinforcement Learning)	317
11.3	Der Begriff „ein Recht auf etwas haben“	321
12	Epilog	329
12.1	Strukturenrealismus	330
12.2	Konstruktivismus	336
12.3	Wie weit reicht das algorithmische Denken?	340
12.4	Erzählungen vs. axiomatisches Denken	343
12.5	Die Bedeutung der Evolution für unsere Denkgewohnheiten	361
	Literatur	365
	Sachverzeichnis	373