
Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Herausgegeben von

Friedhelm Padberg, Universität Bielefeld, Bielefeld

Andreas Büchter, Universität Duisburg-Essen, Essen

Die Reihe „Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II“ (MPS I+II) ist die führende Reihe im Bereich „Mathematik und Didaktik der Mathematik“. Sie ist schon lange auf dem Markt und mit aktuell rund 60 bislang erschienenen oder in konkreter Planung befindlichen Bänden breit aufgestellt. Zielgruppen sind Lehrende und Studierende an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie Lehrkräfte, die nach neuen Ideen für ihren täglichen Unterricht suchen.

Die Reihe MPS I+II enthält eine größere Anzahl weit verbreiteter und bekannter Klassiker sowohl bei den speziell für die Lehrerausbildung konzipierten Mathematikwerken für Studierende aller Schulstufen als auch bei den Werken zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe (einschließlich der frühen mathematischen Bildung), der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II.

Die schon langjährige Position als Marktführer wird durch in regelmäßigen Abständen erscheinende, gründlich überarbeitete Neuauflagen ständig neu erarbeitet und ausgebaut. Ferner wird durch die Einbindung jüngerer Koautorinnen und Koautoren bei schon lange laufenden Titeln gleichermaßen für Kontinuität und Aktualität der Reihe gesorgt. Die Reihe wächst seit Jahren dynamisch und behält dabei die sich ständig verändernden Anforderungen an den Mathematikunterricht und die Lehrerausbildung im Auge.

Konkrete Hinweise auf weitere Bände dieser Reihe finden Sie am Ende dieses Buches und unter <http://www.springer.com/series/8296>

Hans-Georg Weigand · Andreas Filler ·
Reinhard Hölzl · Sebastian Kuntze ·
Matthias Ludwig · Jürgen Roth ·
Barbara Schmidt-Thieme · Gerald Wittmann

Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I

3., erweiterte und überarbeitete Auflage



Springer Spektrum

Hans-Georg Weigand
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Würzburg, Deutschland

Matthias Ludwig
Institut für Mathematik und Informatik
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt
Frankfurt/Main, Deutschland

Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Berlin, Deutschland

Jürgen Roth
Institut für Mathematik
Universität Koblenz-Landau
Landau, Deutschland

Reinhard Hölzl
Pädagogische Hochschule Zentralschweiz
Luzern, Schweiz

Barbara Schmidt-Thieme
Institut für Mathematik und Angewandte Infor-
matik
Universität Hildesheim
Hildesheim, Deutschland

Sebastian Kuntze
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Ludwigsburg, Deutschland

Gerald Wittmann
Institut für Mathematische Bildung
Pädagogische Hochschule Freiburg
Freiburg, Deutschland

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

ISBN 978-3-662-56216-1

ISBN 978-3-662-56217-8 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2009, 2014, 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort zur 3. Auflage

Die Didaktik der Geometrie hat bezüglich ihrer Inhalte einen mittlerweile klassischen Kanon erreicht: Beweisen, Konstruieren, Problemlösen, Begriffsbildung, Figuren und Körper, Kongruenz und Symmetrie, Flächeninhalt und Volumen, Ähnlichkeit und Trigonometrie. Veränderungen ergeben sich in der Schulgeometrie weniger durch Hinzu- oder Wegnahme von Inhalten, als vielmehr durch eine stärkere Betonung des einen oder anderen Themenbereichs. Welche Bedeutung hat heute noch das Beweisen in der Geometrie? Sollte überhaupt noch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden? In welcher Ausprägung sollen trigonometrische Funktionen behandelt werden? Veränderungen ergeben sich aber auch durch methodische Aspekte, durch neue Materialien und Arbeitsmittel sowie durch eine stärkere Verknüpfung mit anderen Gebieten der Mathematik und Bereichen außerhalb der Mathematik. In dieser Neuauflage wurde zunächst einmal die in den letzten Jahren herausgekommene Literatur im Hinblick auf neu in das Buch aufzunehmende Ideen gesichtet. Gelegentlich wurde allerdings auch „nur“ ältere Literatur durch neuere ersetzt. Dann wurden die durch die Fortentwicklung der digitalen Medien ermöglichten Erweiterungen und Neuansätze integriert. Dies trifft vor allem auf die jetzt verfügbaren dynamischen Raumgeometrie-Systeme zu. Dabei wurde allerdings die dem Buch zugrundeliegende Philosophie beibehalten bzw. konsequent weiterentwickelt, einen für Lehramtsstudierenden im Hinblick auf die spätere Unterrichtstätigkeit adäquaten Einstiegs in dieses Themenfeld zu ermöglichen. Wir bedanken uns – insbesondere auch bei unserem Kollegen Stefan Deschauer – für die Fehlerhinweise sowie Verbesserungsvorschläge und freuen uns weiterhin über entsprechende Rückmeldungen.

September 2017

Die Autoren

Vorwort zur 2. Auflage

Die im August 2009 erschienene 1. Auflage hat vor allem bei Studierenden des Lehramts Mathematik für die Sekundarstufen einen großen Zuspruch gefunden. Gefreut haben wir uns auch über die zahlreichen Rückmeldungen von Kolleginnen und Kollegen, die dieses Buch als Grundlage für ihre Veranstaltungen zur Didaktik der Geometrie gewinnbringend einsetzen. Die Kritik an diesem Buch stellte zum einen die starke Orientierung an der fachlichen Grundlegung der Geometrie heraus, und sie bezieht sich zum anderen auf den lediglich „traditionellen Rahmen“ des Geometrieunterrichts, den dieses Buch im Blick haben soll. Beide Aspekte sehen die Autoren aber als wichtige und unverzichtbare Grundpfeiler einer in die Zukunft gerichteten Didaktik an. Jegliche didaktische Überlegungen können nur auf einem tragfähigen fachlichen Fundament aufbauen, wobei sich die Autoren der Idee der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“ verpflichtet fühlen. Und schließlich können innovative Ideen bzgl. der Inhalte und Methoden des Geometrieunterrichts nur auf Kenntnis und einer kritischen Reflexion des sog. traditionellen Geometrieunterrichts aufbauen.

Die Autoren sahen keine Notwendigkeit einer Veränderung des Konzepts dieses Buches. Die hier vorliegende Ausgabe ist eine gegenüber der 1. Auflage fehlerkorrigierte 2. Auflage des Buches. Wir bedanken uns insbesondere bei unseren Kollegen Günter Pickert und Lothar Profke für die gründliche Durchsicht und zahlreiche konstruktive Hinweise zur 1. Auflage.

Mai 2013

Die Autoren

Einleitung

Doch erst zur Tat erregt den tiefsten Sinn
Geometrie, die Allbeherrscherin:
Sie schaut das All durch ein Gesetz belebt,
Sie misst den Raum und was im Raume schwebt,
Sie regelt streng die Kreise der Natur,
Hiernach die Pulse deiner Taschenuhr,
Sie öffnet geistig grenzenlosen Kreis,
Der Menschenhände kümmerlichstem Fleiß.

J. W. v. Goethe (1828)

Die ersten Erzeugnisse der Stotternheimer Saline

Dieses Buch ist in der Überzeugung geschrieben, dass grundlegende Kenntnisse in elementarer Geometrie

- für Berufsausbildung und Studium wichtig sind,
- die Auseinandersetzung mit geometrischen Fragestellungen Denk-, Argumentations- und Problemlösefähigkeiten schulen kann und
- dem Leben eines jeden Einzelnen eine neue Qualität verleihen kann, indem die Beschäftigung mit Geometrie lehrt, die Welt um uns bewusster zu betrachten, sie „mit anderen Augen“ anzusehen.

Es möchte diejenigen unterstützen, die dazu beitragen und fortwährend daran arbeiten, dass diese Aspekte im Geometrieunterricht verwirklicht werden, nämlich Studierende, Lehramtsanwärterinnen und -anwärter, angehende und praktizierende Lehrerinnen und Lehrer.

Didaktik der Geometrie

Die Didaktik der Geometrie beschäftigt sich mit dem Lernen und Lehren von Geometrie. Überlegungen zum *Lehren* sind dabei auf die Auswahl der Inhalte und das Handeln von Personen ausgerichtet, die das Lernen initiieren. *Lernen* hat dagegen stärker Schülerinnen und Schüler und deren zu erwerbendes Wissen und Können sowie zu entwickelnde Fähigkeiten und Fertigkeiten im Blick. *Lehren* erfordert Antworten auf Fragen wie „Warum unterrichten wir Geometrie an allgemeinbildenden Schulen?“ , „Was soll unterrichtet wer-

den?“ oder „Wie soll unterrichtet werden?“. Im Hinblick auf das *Lernen* ist für die Didaktik der Geometrie wichtig, wie Schülerinnen und Schüler, Studierende oder – allgemein – Lernende einen bestimmten Inhalt verstehen oder lernen, welches Wissen und Können, welche Fähigkeiten und Fertigkeiten, also welche *Kompetenzen* sie in welcher Ausprägung erwerben. Lehren und Lernen sind nicht voneinander zu trennen, beide stehen in enger Wechselbeziehung zueinander. Diese Sichtweise liegt auch diesem Buch zugrunde.

Wir sehen Mathematikdidaktik als die Wissenschaft des mathematischen Lernens, die sich mit *Lernprozessen* beschäftigt, die Voraussetzungen für deren Initiierung und vor allem „Unstetigkeiten“ im Lernprozess sowie Möglichkeiten des Umgangs mit ihnen aufzeigen muss. Mathematikdidaktik ist insofern „Ingenieurarbeit“ (Freudenthal 1978, S. 80), bei der es darum geht, Unterricht aufbauend auf wissenschaftlichen Erkenntnissen zu entwickeln. Es ist eine Ingenieurwissenschaft, bei der „die Entwicklung und Erforschung inhaltsbezogener theoretischer Konzepte und praktischer Unterrichtsbeispiele mit dem Ziel einer Verbesserung des realen Unterrichts als Kernbereich in den Mittelpunkt der wissenschaftlichen Arbeit gerückt wird“ (Wittmann 1992, S. 56).

Einer wissenschaftlichen Didaktik der Geometrie stellen sich somit (mindestens) zwei zentrale Aufgaben:

- Die *Analyse und Bewertung von Lehr- und Lernprozessen* und
- das *Entwickeln von Konzepten und Lernumgebungen*.

Dieses Buch verbindet beide Aufgaben miteinander. Es baut auf aktuellen Erkenntnissen über das Lehren und Lernen von Geometrie auf und stellt Grundlagen für die Entwicklung problemorientierter Lernumgebungen bereit. Ihm liegt die Vision einer „Lebendigen Geometrie“ zugrunde, wie sie Graumann, Hölzl, Krainer, Neubrand und Struve in ihrem Überblicksartikel *Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre* bereits im Jahr 1996 gefordert haben. Diese ist dadurch gekennzeichnet, dass einerseits grundlegende Themenbereiche der Geometrie wie Figuren und Körper, Flächeninhalte und Volumina, Symmetrie und Kongruenz, Ähnlichkeit und Trigonometrie zentraler Bestandteil des Geometrieunterrichts sein müssen. Andererseits muss das Lernen von Geometrie aber vor allem in einer aktiven Auseinandersetzung der einzelnen Schülerin und des einzelnen Schülers mit geometrischen Fragestellungen erfolgen. Dabei geht es um das Aufzeigen der komplexen Beziehung zwischen Umwelt und Begriffsbildung und die Auseinandersetzung mit wichtigen Aspekten wie Beweisen und Argumentieren, Konstruieren, Problemlösen und Begriffslernen und -lehren. Einen Überblick über die Geometrie hinsichtlich ihrer Entwicklung als Wissenschaft, ihrer Bedeutung als Schulfach sowie zentraler Aspekte des Lernens von Geometrie geben Hattermann et al. (2015).

Dieses Buch möchte Lehrende dabei unterstützen, ihren Unterricht so zu gestalten, dass diese auch in den „Bildungsstandards“ (KMK 2004) hervorgehobenen Ziele erreicht werden. Es ist von Autoren geschrieben, die sich seit vielen Jahren mit grundlegenden Fragen des Lehrens und Lernens von Mathematik und der Verbesserung des Mathematikunterrichts auseinandersetzen.

Inhalte der einzelnen Kapitel

Dieses Buch ist durch einen intensiven Ideenaustausch der Autoren entstanden, die einzelnen Kapitel lassen sich jedoch einzelnen Autoren zuordnen, die dafür federführend (und verantwortlich) sind.

Im Kap. 1 von Hans-Georg Weigand werden die *Ziele des Geometrieunterrichts* aufgezeigt. Diese orientieren sich zum einen an Leitlinien eines *allgemeinbildenden Geometrieunterrichts*: Geometrie und die Erschließung der Welt, Geometrie und die Grundlagen des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens, Geometrie und Problemlösen. Sie lassen sich zum anderen aber auch *inhaltspezifischen Leitlinien* zuordnen: Verständnis geometrischer Begriffe und ihrer Eigenschaften, Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen, Erkennen der Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit.

Das Kap. 2 von Gerald Wittmann ist dem *Beweisen und Argumentieren* gewidmet. Es ist heute unbestritten, dass die in der Fachwissenschaft im Zusammenhang mit dem Beweisen praktizierten Methoden nicht einfach auf den Unterricht übertragen werden können. Deshalb wird hier vor allem das Argumentieren in den Mittelpunkt gestellt, das stärker die Bedeutung des Arbeitens mit verschiedenen Darstellungsformen betont.

Im Kap. 3 von Matthias Ludwig und Hans-Georg Weigand wird das *Konstruieren* als eine grundlegende Tätigkeit im Geometrieunterricht herausgestellt. Dieses ist hier gegenüber den traditionellen Zirkel- und Lineal-Konstruktionen weiter gefasst, da im heutigen Geometrieunterricht der Tätigkeit des Konstruierens mit verschiedensten Hilfsmitteln wie Geodreieck, Falten von Papier oder einer Dynamischen Geometrie-Software eine zentrale Bedeutung zukommt. Konkret geht es um Problemlöseprozesse, um das Entwerfen und Überprüfen von Konstruktionsplänen und das Verbalisieren in Form von Konstruktionsbeschreibungen.

Kap. 4 von Gerald Wittmann behandelt das *Problemlösen* im Geometrieunterricht. Es werden verschiedene Problemstellungen nach Berechnungs-, Modellierungs- oder Optimierungsproblemen klassifiziert, die Ziele des Problemlösens dargelegt und Strategien des Problemlösens aufgezeigt.

Kap. 5 von Hans-Georg Weigand geht auf das *Begriffslernen und -lehren* ein. Dabei geht es um den Aufbau angemessener Vorstellungen, um den Erwerb von Kenntnissen und die Aneignung von Fähigkeiten im Zusammenhang mit geometrischen Begriffen. Es werden kurz-, mittel- und langfristige Strategien des Begriffslehrens im Geometrieunterricht aufgezeigt.

Während die ersten fünf Kapitel dieses Buches allgemeinen oder inhaltsübergreifenden Zielen gewidmet sind, geht es in den folgenden Kapiteln um inhaltspezifische Ziele des Geometrieunterrichts.

Kap. 6 von Jürgen Roth und Gerald Wittmann stellt *Figuren und Körper* in den Mittelpunkt. Es werden die zentralen Figuren Dreieck und Viereck behandelt und Möglichkeiten einer selbstständigen Erarbeitung mit Materialien sowie in computergestützten Lernumgebungen aufgezeigt. Einschlägige Beispiele verdeutlichen die Entwicklung der Körperbegriffe, Körpermodelle und Netze. Schließlich wird die Raumvorstellung als Fähigkeitspro-

fil dargestellt und analysiert, wie deren Entwicklung durch Kopfgeometrie unterstützt werden kann.

Im Kap. 7 von Sebastian Kuntze geht es um *Flächeninhalte und Volumina*. Dabei wird das „Messen“ als zentrale Leitidee für Konzepte zum Flächeninhalt und Volumen zugrunde gelegt, und es wird die Ausbildung von Begriffsvorstellungen und deren mathematische Formalisierung über die gesamte Schulzeit hinweg beschrieben.

Im Kap. 8 von Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand wird die Entwicklung der in enger Beziehung stehenden Begriffe *Symmetrie und Kongruenz* im Geometrieunterricht aufgezeigt. Das Kapitel ist durch die stete Wechselbeziehung zwischen dem Erkennen und Interpretieren von Umweltphänomenen und deren Präzisierung durch Begriffe im Geometrieunterricht gekennzeichnet.

Kap. 9 von Reinhard Hölzl ist der *Ähnlichkeit* gewidmet. Ausgehend von intuitiven Vorstellungen zu diesem Begriff werden der Euklidische und der abbildungsgeometrische Zugang gegenübergestellt. Aus der Idee der maßstäblichen Vergrößerung resultieren die Strahlensätze, während die zentrische Streckung als Baustein der Ähnlichkeitsabbildungen behandelt wird. Der Satz des Pythagoras und die Charakterisierung ähnlicher Dreiecke gehören zu den zentralen Aussagen der Ähnlichkeitsgeometrie und bilden die mathematische Grundlage der im Kapitel gezeigten Anwendungen.

Im Kap. 10 von Andreas Filler wird die *Trigonometrie* als eine neue Stufe der „Algebraisierung der Geometrie“ herausgestellt. Es werden die beiden zentralen Zugänge – Einführung am rechtwinkligen Dreieck bzw. der funktionale Zugang – an unterrichtspraktischen Beispielen erläutert. Dann werden verschiedene Anwendungen insbesondere auch in der Raumgeometrie behandelt. Den Abschluss bildet die Definition der trigonometrischen Funktionen.

Das Buch wird durch das Kap. 11 von Hans-Georg Weigand *Geometrie und Geometrieunterricht* abgerundet. Dabei geht es nicht um eine Darstellung der Geschichte der Geometrie oder des Geometrieunterrichts, sondern um das Aufzeigen der Entwicklungen von Vorstellungen über geometrische Begriffe, Verfahren und verschiedene konzeptionelle Ansätze und deren Wandel im Verlauf der langen Geschichte der Geometrie. Diese Darstellung soll Lehrenden helfen, die auch heute noch wichtigen und von Schülerinnen und Schülern immer wieder gestellten Fragen nach dem Sinn oder dem Wesen geometrischer Begriffe und Verfahren auch unter einem historisch-genetischen Blickwinkel beantworten zu können.

Ausblick und Dank

Aufgrund des vorgegebenen Umfangs mussten sich alle Kapitel dieses Buches auf die Grundlagen der jeweiligen Themenbereiche beschränken. Das Buch kann deshalb nur als eine Einführung in die Grundlagen einer Didaktik der Geometrie angesehen werden. Es gibt aber eine eigene *Internetseite* www.didaktik-der-geometrie.de, auf der weitere Materialien zu diesem Buch (Computerprogramme, Literatur, Animationen) und zahlreiche Übungsaufgaben zu den einzelnen Kapiteln bereitgestellt werden. Ferner sei auch auf die Internetseite „MaDiN – Mathematikdidaktik im Netz“ (www.madin.net) hingewiesen, auf

der sich weitere Materialien, Aktivitäten und Übungsaufgaben zur Didaktik der Geometrie befinden.

An der Entstehung dieses Buches waren viele Personen beteiligt. Die Autoren möchten sich insbesondere bei Herrn Kollegen Hans-Joachim Vollrath bedanken, dessen didaktische Ideen in vielfacher Form in die Konzeption dieses Buches eingeflossen sind, der viele Kapitel dieses Buches Korrektur gelesen und zahlreiche konstruktive Anregungen gegeben hat.

Weiterhin bedanken wir uns bei Herrn Kollegen Friedhelm Padberg für die Aufnahme in diese Reihe des Spektrum Verlages sowie viele konstruktive Anregungen am Gesamtmanuskript und bei Frau Lühker vom Spektrum Akademischer Verlag für die verständnisvolle Zusammenarbeit bei und die gezeigte Geduld bei der Verzögerung der Fertigstellung dieses Buches.

Würzburg, August 2009

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1	Ziele des Geometrieunterrichts	1
1.1	Lernziele, Kompetenzen und Leitlinien	1
1.1.1	Drei Grunderfahrungen der mathematischen Bildung	3
1.2	Allgemeine Ziele des Geometrieunterrichts	4
1.2.1	Geometrie und die Erschließung der Welt	5
1.2.2	Grundlagen wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens	8
1.2.3	Geometrie und Problemlösen	9
1.3	Inhaltsspezifische Ziele des Geometrieunterrichts	11
1.3.1	Verständnis geometrischer Begriffe und ihrer Eigenschaften	11
1.3.2	Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen	13
1.3.3	Erkennen der Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit	14
1.4	Zur Unterrichtskultur	15
1.4.1	Instruktion und Konstruktion	16
1.4.2	Produkt und Prozess	17
1.4.3	Vernetzung und Kumulatives Lernen	17
1.4.4	Handlungsorientierung und Operatives Prinzip	18
1.4.5	Einsatz neuer Technologien	19
2	Beweisen und Argumentieren	21
2.1	Beweisen in der Geometrie	22
2.1.1	Was ist ein Beweis?	22
2.1.2	Funktionen des Beweisens	23
2.1.3	Beweis und Beweisfindung	25
2.1.4	Beweistypen	29
2.2	Beweisen und Argumentieren im Unterricht	31
2.2.1	Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern	31
2.2.2	Mathematisch argumentieren	34
2.2.3	Inhaltlich-anschauliche Beweise	39

3	Konstruieren	43
3.1	Konstruktive Zugänge zur Geometrie	43
3.1.1	Spannen von Seilen und Bändern	43
3.1.2	Falten	45
3.1.3	Zeichnen	46
3.2	Die Werkzeuge	47
3.2.1	Die Klassiker: Zirkel und Lineal	47
3.2.2	Die Praktischen: Parallelzeichner und Geodreieck	48
3.2.3	Die Modernen: Computer	49
3.3	Konstruieren als mathematische Tätigkeit	50
3.3.1	Bedeutung von <i>Zirkel-und-Lineal</i> -Konstruktionen	50
3.3.2	Was versteht man unter Konstruieren?	51
3.3.3	Konstruktionsbeschreibungen	53
3.4	Vom Einfachen zum Komplexen	55
3.4.1	Grund- und Standardkonstruktionen	55
3.4.2	Das Modulkonzept	56
3.5	Didaktische Bedeutung von Konstruktionsaufgaben	58
3.5.1	Konstruieren als Problemlösen	58
3.5.2	Warum Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen?	60
3.5.3	Konstruktionen mit dem Computer	62
4	Problemlösen	67
4.1	Problemlösen im Geometrieunterricht	68
4.1.1	Was ist ein Problem?	68
4.1.2	Schritte im Problemlöseprozess	70
4.1.3	Ziele des Problemlösens	72
4.2	Problemlösen lehren und lernen	76
4.2.1	Allgemeine heuristische Strategien	76
4.2.2	Inhaltsspezifische heuristische Strategien	80
4.2.3	Hilfen im Lösungsprozess	82
5	Begriffslernen und Begriffslehren	85
5.1	Zum Prozess der Begriffsbildung	85
5.1.1	Mentale Modelle	86
5.1.2	Phänomene als Ausgangspunkte	87
5.1.3	Arten des Begriffserwerbs	88
5.2	Lernen geometrischer Begriffe	91
5.2.1	Aufbau angemessener Vorstellungen	91
5.2.2	Erwerb von Kenntnissen	94
5.2.3	Aneignung von Fähigkeiten	95

5.3	Das Definieren geometrischer Begriffe	97
5.3.1	Logische Aspekte von Definitionen	97
5.3.2	Definitionen im Geometrieunterricht	98
5.3.3	Genetische und charakterisierende Definitionen	99
5.4	Strategien des Begriffslehrens	100
5.4.1	Kurzfristiges Lehren geometrischer Begriffe	100
5.4.2	Mittelfristiges Lehren geometrischer Begriffe	102
5.4.3	Langfristiges Lehren geometrischer Begriffe	104
6	Ebene Figuren und Körper	107
6.1	Lehren und Lernen von ebenen Figuren und Körpern	108
6.1.1	Interne und externe Bezüge	108
6.1.2	Bedeutung operativer Begriffsbildungen	109
6.2	Dreiecke	113
6.2.1	Dreiecke als Grundbausteine	113
6.2.2	Dreiecksgrundformen	116
6.3	Vierecke	120
6.3.1	Begriffsumfang der Vierecksbegriffe	121
6.3.2	Viereckseigenschaften und Haus der Vierecke	122
6.4	Körper	129
6.4.1	Lernen der Körpergrundformen	130
6.4.2	Körpermodelle und -netze	133
6.5	Räumliches Vorstellungsvermögen und Kopfgeometrie	137
6.5.1	Räumliches Vorstellungsvermögen	137
6.5.2	Kopfgeometrie	142
7	Flächeninhalt und Volumen	149
7.1	Messen als Leitidee für Flächeninhalts- und Volumenbestimmungen	150
7.1.1	Ziele	150
7.1.2	Flächen- und Volumenmessung im Laufe der Schuljahre	151
7.1.3	Aspekte des Messens	151
7.1.4	Kontexte des Messens	152
7.2	Flächeninhaltsbegriff und Volumenbegriff	157
7.2.1	Flächeninhalte und Volumina als Größenbereiche	158
7.2.2	Flächeninhaltsbegriff	159
7.2.3	Auslegen bzw. Ausfüllen	163
7.2.4	Zerlegen und Ergänzen	164
7.2.5	Flächen- und Körperverwandlungen	166
7.2.6	Approximieren von Flächen- und Rauminhalten	169
7.2.7	Zusammenhänge: Flächeninhalts- und Volumenformeln	172
7.3	Funktionale Zusammenhänge, Flächeninhalt und Volumen	172
7.4	Ausblicke	177

8	Symmetrie und Kongruenz	179
8.1	Mathematische Grundlagen von Symmetrie und Kongruenz	179
8.1.1	Symmetrie	180
8.1.2	Kongruenz	182
8.2	Symmetrie als Begriff	182
8.2.1	Symmetrie als Umweltphänomen	182
8.2.2	Entwicklung des Symmetriebegriffs	184
8.3	Der Symmetriebegriff zu Beginn der Sekundarstufe I	187
8.3.1	Symmetrische Figuren	187
8.3.2	Symmetrie-/Kongruenzabbildungen	189
8.3.3	Anwendungen der Symmetrie	190
8.4	Kongruenz	193
8.4.1	Bedeutung von Abbildungen	194
8.4.2	Die beiden Zugänge zum Kongruenzbegriff	194
8.4.3	Kongruenzsätze	195
8.4.4	Kongruenzbeweise versus Abbildungsbeweise	197
8.5	Symmetrie und Kongruenz im Raum	199
8.5.1	Kongruente Körper	199
8.5.2	Symmetrische Körper	200
9	Ähnlichkeit	203
9.1	Ähnlichkeit in Figuren	204
9.1.1	Phänomen „Ähnlichkeit“	204
9.1.2	Die Strahlensätze	207
9.1.3	Die Umkehrung der Strahlensätze	210
9.2	Ähnlichkeitsabbildungen	211
9.2.1	Geometrische Abbildungen	211
9.2.2	Die zentrische Streckung	213
9.2.3	Die Ähnlichkeitssätze	214
9.3	Anwendungen der Ähnlichkeitslehre	216
9.3.1	Der Satz des Pythagoras	216
9.3.2	Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks	218
9.3.3	Der Goldene Schnitt	219
9.3.4	Die harmonische Teilung	222
10	Trigonometrie	227
10.1	Bedeutung der Trigonometrie in der Sekundarstufe I	228
10.1.1	Bezüge zu früheren Inhalten des Mathematikunterrichts	228
10.1.2	Algebraisierung: Von Konstruktionen zu Berechnungen	229
10.1.3	Mit Dreiecken Konstruktions- und Vermessungsprobleme lösen	231
10.2	Einstiege in die Trigonometrie	232
10.2.1	Vergleich zweier Einstiege	232
10.2.2	Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck	233

10.3	Eigenschaften und Anwendungen von Sinus, Kosinus und Tangens	239
10.3.1	Näherungswerte bestimmen und auswerten	239
10.3.2	Exakte Bestimmung einiger Funktionswerte	240
10.3.3	Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens	241
10.3.4	Lösen von Übungs- und Anwendungsaufgaben	241
10.3.5	Berechnungen in beliebigen Dreiecken	243
10.3.6	Anwendungen der Trigonometrie in der Raumgeometrie	245
10.4	Trigonometrische Funktionen	247
10.4.1	Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkelgrößen	247
10.4.2	Graphen der trigonometrischen Funktionen	250
10.4.3	Einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen	251
10.5	Ausblicke	252
11	Geometrie und Geometrieunterricht	255
11.1	Geometrie als „Erdmessung“	256
11.1.1	Geometrie als praktische Lebenshilfe	256
11.1.2	Geometrie und die Darstellung unserer Umwelt	256
11.2	Geometrie und die Macht des Denkens	257
11.2.1	Thales von Milet	257
11.2.2	Pythagoras von Samos	257
11.2.3	Platon	258
11.3	Die Elemente des Euklid	259
11.3.1	Definitionen	259
11.3.2	Postulate	260
11.3.3	Axiome	260
11.4	Hilberts Grundlagen der Geometrie	261
11.4.1	Zum Wesen mathematischer Objekte	261
11.4.2	Axiome	262
11.4.3	Euklid versus Hilbert	263
11.5	Der Geometrieunterricht – hin zu Euklid	263
11.5.1	Praktischer Aspekt	264
11.5.2	Schule des Denkens	264
11.6	Der Geometrieunterricht – weg von Euklid	266
11.6.1	Bewegliche Geometrie	266
11.6.2	Abbildungsgeometrie	267
11.6.3	Kongruenzgeometrie	267
11.6.4	Aktuelle Strömungen	268
	Hinweis der Herausgeber	271
	Verwendete Abkürzungen in der Literatur	273
	Literatur	275
	Sachverzeichnis	289