

---

# Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen

---

Claus-Dieter Munz · Thomas Westermann

# Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen

Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch  
für Ingenieure

4., verbesserte und überarbeitete Auflage



Springer Vieweg

Claus-Dieter Munz  
Universität Stuttgart  
Stuttgart, Deutschland

Thomas Westermann  
Hochschule Karlsruhe  
Karlsruhe, Deutschland

Ergänzendes Material zu diesem Buch finden Sie auf  
<https://www.springer.com/de/book/9783662558850>.

ISBN 978-3-662-55885-0

ISBN 978-3-662-55886-7 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-55886-7>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006, 2009, 2012, 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

# Vorwort

Die Berechnung der meisten natur- und ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen führt auf eine oder mehrere Differenzialgleichungen. Deshalb stellen wir in diesem Buch deren numerische Lösung in den Mittelpunkt einer Numerik für Ingenieure. Die notwendigen Kenntnisse aus anderen Bereichen der numerischen Mathematik, wie z.B. der Interpolation oder der numerischen Lösung von linearen Gleichungssystemen, werden an der Stelle erläutert, wo sie benötigt werden. Diese „Hilfsmittel“ beschreiben wir im Anhang, so kurz wie möglich und vervollständigt mit Angabe von weiterführender Literatur.

Dieses Buch wurde zunächst als ein interaktives Skriptum für die Vorlesung „Numerische Methoden für Ingenieure“ entwickelt. Das Ziel war, die beiden Aspekte Theorie und Erfahrung gemeinsam zu vermitteln. Es wurden Rechenprogramme entwickelt, mit denen sich numerische Rechnungen in der Vorlesung ausführen lassen und die Ergebnisse mit den Studierenden zusammen diskutiert werden können. Realisiert als MAPLE<sup>1</sup>-Worksheets ließen sich diese Programme auch aus der pdf-Version des Skripts direkt ausführen und modifizieren. Neben den MAPLE-Worksheets wurden inzwischen auch MATLAB<sup>®2</sup>-Scripte geschrieben, mit denen die Beispiele und Aufgaben ebenso gerechnet werden können. Beide Versionen können von der Webseite [www.imathonline.de/revokos/](http://www.imathonline.de/revokos/) herunter geladen werden. Hat man MAPLE oder MATLAB zur Verfügung, können die Ergebnisse des Beispiels nachvollzogen oder auch Änderungen in den Programmen ausgeführt werden.

Mit dem Buch und den Script-Files haben wir ein Lehrkonzept realisiert, welches alle drei Aspekte der numerischen Simulation berücksichtigt: Numerische Methoden, Umsetzung in Algorithmen und Rechenprogramme für die Anwendung auf praktische Probleme.

**Hören und passives Erleben in der Vorlesung** Das Kennenlernen der numerischen Methoden und Ideen der Approximation geschieht in der Vorlesung. Gerade bei einem großen Publikum in den Grundvorlesungen der Numerik für Ingenieure lässt sich hier Interaktion mit den Zuhörern nur eingeschränkt verwirklichen. Das Erleben der numerischen Simula-

---

<sup>1</sup> MAPLE<sup>TM</sup> ist ein eingetragenes Warenzeichen der Firma „Maplesoft“ [www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com).

<sup>2</sup> MATLAB<sup>®</sup> ist ein eingetragenes Warenzeichen der Firma „The MathWorks, Inc.“ [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).

tion aber ist bereits möglich, indem die Beispiele aus dem Buch in der Vortragsvorlesung verwendet werden. Numerische Methoden können somit direkt in der Vorlesung ausgeführt werden – mit kleinen Lernspielen für das Publikum.

**Lesen und eigenes Experimentieren** Bei der Nachbereitung haben die Studierenden die Möglichkeit auf dem eigenen PC oder Laptop, das Gelesene auch gleich in der Praxis zu erproben. Die vorgearbeiteten Beispiele sind direkt greifbar und die Schnittstellen für eigene Modifikationen einfach. Das Erlernen der Programmiersprache in MAPLE oder von MATLAB geschieht dabei automatisch.

**Schreiben eigener Programme** Solchermaßen vorbereitet ist es für die Studierenden oder den Leser ein relativ kleiner Schritt, für konkrete Aufgabenstellungen eigene Programme zu entwickeln. In den Lehrveranstaltungen wird dies von uns durch Tutorien und Aufgabenblätter unterstützt.

Damit werden dem „Leser“ neue Möglichkeiten eröffnet. Neben der Nachrechnung des Beispiels können in dem aufgerufenen MAPLE-Worksheet oder MATLAB-Script die Diskretisierungsparameter geändert werden. Man kann mit den numerischen Verfahren experimentieren und sie auf neue Probleme anwenden. Im Buch wird vereinfachend mit „Script-File“ auf diese elektronische Zusatzmaterialien hingewiesen. Steht weder MAPLE noch MATLAB zur Verfügung, fällt die Möglichkeit des interaktiven Arbeitens weg. Zur Veranschaulichung sind die wesentlichen Ergebnisse der Rechnungen als Abbildungen im Buch. Zusätzlich können die Worksheets in einer html-Version betrachtet werden.

Das Konzept dieses Buches mit der engen Verbindung von Rechenprogrammen und Text wurde durch Unterstützung des Ministeriums für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg im Rahmen eines Projektes „Innovative Lehre“ unterstützt. Wir möchten uns dafür an dieser Stelle herzlichst bedanken. An mehreren Stellen konnten wir auf das „alte“ Skriptum von Prof. Dr. Karl Förster, überarbeitet und ergänzt von Dr. Alfred Geiger [1] aufbauen. Wir haben hier sehr profitiert und möchten uns dafür sehr herzlich bedanken. Unser herzlicher Dank gebührt dann vor allem einer großen Zahl von unseren Mitarbeitern, die uns bei der Erstellung des Buches tatkräftig unterstützt haben. Für die Unterstützung bei der 4. Auflage möchten wir uns vor allem bei Daniel Kempf bedanken. Unser Dank gilt auch Frau Kollmar-Thoni für die gute und angenehme Zusammenarbeit.

Stuttgart  
im Juni 2018

Claus-Dieter Munz  
Thomas Westermann

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> . . . . .	1
1.1	Modellierungsfehler, Approximationsfehler und Rundungsfehler . . . . .	2
1.2	Struktogramme . . . . .	7
1.3	Arbeiten mit den Rechenprogrammen . . . . .	12
	Literatur . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Numerische Integration und Differenziation</b> . . . . .	15
2.1	Die zwei Ideen . . . . .	19
2.2	Der Taylor-Abgleich . . . . .	25
2.3	Summierte Mittelwertformeln . . . . .	30
2.4	Die Gaußschen Integrationsformeln . . . . .	35
2.5	Adaptivität und Fehlerextrapolation . . . . .	39
2.6	Numerische Differenziation . . . . .	45
2.7	Bemerkungen und Entscheidungshilfen . . . . .	52
2.8	Beispiele und Aufgaben . . . . .	53
	Literatur . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differenzialgleichungen</b> . . . . .	55
3.1	Das Euler-Cauchy-Verfahren . . . . .	61
3.2	Stabilität, Konsistenz und Konvergenz . . . . .	72
3.2.1	Stabilität . . . . .	73
3.2.2	Konsistenz . . . . .	78
3.2.3	Konvergenz . . . . .	79
3.3	Mehrschrittverfahren . . . . .	81
3.4	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	87
3.5	Extrapolationsverfahren . . . . .	93
3.6	Schrittweitenkontrolle und Fehlerschätzer . . . . .	95
3.7	Systeme von Differenzialgleichungen und Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	97
3.8	Bemerkungen und Entscheidungshilfen . . . . .	101
3.9	Beispiele und Aufgaben . . . . .	103
	Literatur . . . . .	107

<b>4</b>	<b>Rand- und Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differenzialgleichungen</b>	109
4.1	Vorbemerkungen und Begriffsbestimmungen	109
4.1.1	Homogenes Randwertproblem (Eigenwertproblem)	111
4.1.2	Inhomogenes Randwertproblem	112
4.2	Schießverfahren	113
4.2.1	Lineare Probleme	115
4.2.2	Nichtlineare Probleme	116
4.3	Differenzenverfahren	119
4.4	Differenzenformeln mit Ableitungen	124
4.5	Methode der gewichteten Residuen	128
4.6	Das Ritzsche Verfahren	134
4.6.1	Variationsproblem	134
4.6.2	Approximation	138
4.7	Die Finite-Elemente-Methode	139
4.7.1	Stückweise lineare Ansatzfunktionen	140
4.7.2	Galerkin-Verfahren	142
4.7.3	Ritz-Verfahren	148
4.8	Eigenwertproblem	155
4.8.1	Exakte Lösung der Differenzialgleichung	156
4.8.2	Numerische Lösung mit dem Differenzenverfahren	157
4.8.3	Numerische Lösung mit dem Ritzschen Verfahren	159
4.9	Bemerkungen und Entscheidungshilfen	162
4.10	Beispiele und Aufgaben	163
	Literatur	168
<b>5</b>	<b>Grundlagen der partiellen Differenzialgleichungen</b>	169
5.1	Klassifizierung der partiellen Differenzialgleichungen 2. Ordnung	170
5.2	Elliptische Differenzialgleichungen 2. Ordnung	173
5.3	Parabolische Differenzialgleichungen 2. Ordnung	179
5.4	Hyperbolische Differenzialgleichungen 2. Ordnung	183
5.5	Evolutionsgleichungen	188
5.6	Erhaltungsgleichungen	195
5.7	Anwendungen	201
5.7.1	Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen	201
5.7.2	Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen	205
5.7.3	Die Gleichungen der Akustik	207
5.8	Bemerkungen	209
5.9	Beispiele und Aufgaben	210
	Literatur	218

---

<b>6</b>	<b>Grundlagen der numerischen Verfahren für partielle Differenzialgleichungen</b>	221
6.1	Konsistenz, Stabilität und Konvergenz	221
6.2	Die Diskretisierung des Rechengebietes	225
6.2.1	Beschreibung technischer Gebiete	226
6.2.2	Erzeugung von randangepassten Gittern	228
6.3	Bemerkungen	230
	Literatur	231
<b>7</b>	<b>Differenzenverfahren</b>	233
7.1	Elliptische Differenzialgleichungen	236
7.2	Parabolische Differenzialgleichungen	249
7.3	Hyperbolische Differenzialgleichungen	261
7.4	Verfahren auf randangepassten Gittern	276
7.5	Bemerkungen und Entscheidungshilfen	280
7.6	Beispiele und Aufgaben	282
	Literatur	285
<b>8</b>	<b>Finite-Elemente-Methode</b>	287
8.1	Triangulierung mit linearen Basisfunktionen	290
8.2	Triangulierung mit linearen Elementfunktionen	297
8.3	Rechteckerlegung mit bilinearen Elementen	300
8.4	Triangulierung mit quadratischen Elementen	303
8.5	Bemerkungen und Entscheidungshilfen	311
8.6	Beispiele und Aufgaben	313
	Literatur	315
<b>9</b>	<b>Finite-Volumen-Verfahren</b>	317
9.1	Lineare Transportgleichungen	322
9.2	Skalare Erhaltungsgleichungen	331
9.3	Systeme von Erhaltungsgleichungen	337
9.4	Erhaltungsgleichungen in mehreren Raumdimensionen	341
9.5	Bemerkungen und Entscheidungshilfen	342
9.6	Beispiele und Aufgaben	344
	Literatur	349
<b>A</b>	<b>Interpolation</b>	351
A.1	Die Interpolationsformel von Lagrange	353
A.2	Die Interpolationsformel von Newton	356
A.3	Spline-Interpolation	361
A.4	Bemerkungen und Entscheidungshilfen	363



---

<b>B Lösen nichtlinearer Gleichungen</b> . . . . .	365
B.1 Bisektion . . . . .	366
B.2 Regula Falsi . . . . .	367
B.3 Sekantenverfahren . . . . .	368
B.4 Das Newton-Verfahren . . . . .	369
B.5 Bemerkungen und Entscheidungshilfen . . . . .	371
<b>C Iterative Methoden zur numerischen Lösung von linearen Gleichungssystemen</b> . . . . .	373
C.1 Die klassischen Iterationsmethoden . . . . .	374
C.2 Mehrgitterverfahren . . . . .	379
C.3 Das Verfahren der konjugierten Gradienten . . . . .	382
C.4 Bemerkungen und Entscheidungshilfen . . . . .	386
<b>Literatur</b> . . . . .	389
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	391