Analysis – Grundlagen und Exkurse

Adrian Hirn · Christian Weiß

Analysis – Grundlagen und Exkurse

Grundprinzipien der Differential- und Integralrechnung

Springer Spektrum

Prof. Dr. Adrian Hirn
Fakultät Grundlagen
Hochschule Esslingen
Göppingen
Deutschland

Prof. Dr. Christian Weiß
Institut Naturwissenschaften
Hochschule Ruhr West
Mülheim an der Ruhr
Deutschland

Die Darstellung von manchen Formeln und Strukturelementen war in einigen elektronischen Ausgaben nicht korrekt, dies ist nun korrigiert. Wir bitten damit verbundene Unannehmlichkeiten zu entschuldigen und danken den Lesern für Hinweise.

ISBN 978-3-662-55537-8 ISBN 978-3-662-55538-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-55538-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Als Teilgebiet der Mathematik umfasst die klassische Analysis die Differential- und Integralrechnung, deren Grundlagen von Gottfried W. Leibniz (1646–1716) und Sir Isaac Newton (1643–1727) bereits im 17. Jahrhundert unabhängig voneinander geschaffen wurden. In den über 400 Jahren, die seitdem vergangen sind, hat sich der Blickwinkel auf die Analysis immer wieder gewandelt. Zunächst wurden die verschiedenen mathematischen Disziplinen – neben der Analysis ist hier die Algebra das andere klassische Beispiel – als weitgehend unabhängig voneinander gesehen und entsprechend verliefen diverse Entwicklungen parallel. Spätestens in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts rückte aber die Erforschung der Interaktion der verschiedenen Zweige der Mathematik immer mehr in den Vordergrund. Erst dadurch konnten viele langjährig offenen mathematischen Fragestellungen beantwortet werden. Ein Musterbeispiel hierfür ist der sogenannte *letzte Satz von Fermat*, der besagt, dass es für jede natürliche Zahl n größer 2 keine Lösung der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

gibt, für die x, y und z selbst natürliche Zahlen sind. Der Beweis von Andrew Wiles (*1953) verknüpft auf geradezu virtuose Weise Erkenntnisse aus Algebra und Analysis. Anwendungen der Analysis finden sich jedoch nicht nur in vielen anderen Teilgebieten der Mathematik, sondern beispielsweise auch in den Naturwissenschaften, der Ingenieurstechnik und in der Erforschung der Finanzmärkte. Für einen vollständig ausgebildeten Mathematiker ist dies keine Neuigkeit, jedoch erfordert es viele Jahre intensiven Studiums, diese Zusammenhänge selbstständig zu erkennen. Das vorliegende Lehrbuch versucht deshalb, genau diesen Aspekt der Anwendungen verstärkt aufzugreifen. Gemeinsam mit dem zweiten Band beinhaltet es den gesamten Lehrstoff einer zwei- bis dreisemestrigen Analysis-Grundvorlesung, wie er an deutschen Universitäten typischerweise gelehrt wird.

Um Analysis (sinnvoll) betreiben zu können, ist es zunächst notwendig, die Grundlagen von Folgen und Reihen zu erarbeiten. Hierauf fußt letztlich der gesamte weitere Inhalt dieses Buchs. Um möglichst schnell zu diesem Themengebiet vorzustoßen und dennoch eine in sich abgeschlossene Darstellung zu haben, haben wir uns dazu entschlossen, die reellen Zahlen axiomatisch einzuführen. Das heißt, dass wir auf eine algebraisch exakte Definition, die auf der Axiomatik von Giuseppe Peano (1858–1932) und der Konstruktion via Äquivalenzklassen beruht, nur am Rande eingehen. Diese alternative Herangehensweise ist in zahlreichen Lehrbüchern der Algebra zu finden, wie zum Beispiel in dem gleichsam lesenswerten wie verständlichen Buch [Ebb92]. Danach klären wir elementare Grundbegriffe der Analysis: Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit, Differentiation, Integration nach Riemann. In diesem Zusammenhang werden auch gewöhnliche Differentialgleichungen und die numerische Approximation ihrer Lösungen besprochen. Schließlich befassen wir uns mit Wegintegralen und geben Einblicke in die komplexe Analysis. Damit ist der Inhalt abgedeckt, der einem Studierenden nach den ersten beiden Semestern bekannt sein sollte.

Beim Verfassen haben wir großen Wert darauf gelegt,

- mit klarer Struktur möglichst schnell zu den zentralen Aussagen der Analysis vorzustoßen.
- ein in sich geschlossenes Lehrbuch zu verfassen, also ein vollständiges Gedankengerüst zu erschaffen, für dessen Entwicklung keine weitere Literatur benötigt wird.
- die Beziehung der Analysis zu anderen Teilgebieten der Mathematik aufzuzeigen.
- die Bedeutung der Analysis für praktische Anwendungen sichtbar zu machen.

Es wird in Fachkreisen immer wieder die Frage diskutiert, ob Analysis sinnvollerweise bereits zu Beginn des Studiums mehrdimensional behandelt werden soll oder ob man sich zunächst auf den eindimensionalen Fall beschränken soll. Für den mehrdimensionalen Ansatz ist das wesentliche Argument seine Allgemeinheit und das Vermeiden von Wiederholungen. Jedoch haben wir die zweite Variante gewählt: Einerseits halten wir diese Herangehensweise für didaktisch besser, weil sie den zu Beginn doch recht steilen Weg zur Analysis wenigstens ein bisschen ebnet, andererseits erschließt man bereits im Eindimensionalen viele der wesentlichen Denkweisen und Erkenntnisse der Analysis. Dem Leser wird der mehrdimensionale Fall so wesentlich einfacher fallen, ohne dass er dabei einen Verlust erlitten hätte.

In diesem Lehrbuch werden alle wesentlichen Aussagen der Analysis ausführlich bewiesen und notwendige Resultate aus der linearen Algebra in Kap. 10 umfangreich zusammengefasst. Für ein intensives Studium der linearen Algebra, die sozusagen das zweite Standbein der Grundausbildung eines modernen Mathematikers ist, empfehlen wir beispielsweise das Lehrbuch [Fis13], das vor Kurzem in einer rundum überarbeiteten Neuauflage erschienen ist. Wir haben uns ganz bewusst dazu entschieden, die klassische Satz-Beweis-Struktur beizubehalten, um den Blickpunkt auf das Wesentliche zu lenken.[1] Mit klarer Struktur kommen wir so zu den zentralen Aussagen der Analysis voran. Regelmäßig werden dabei inhaltliche Beziehungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik herausgearbeitet und Anwendungen in der Praxis aufgezeigt. So wird dem Leser die weitreichende Bedeutung der Analysis vermittelt und dem Studierenden ermöglicht, beurteilen zu können, welche Fachrichtung für sein weitergehendes Mathematik-Studium interessant sein könnte. Dazu ergänzen wir den üblichen Lehrstoff um sogenannte *-Kapitel, welche für die weitere Entwicklung des analytischen Grundgerüsts nicht zwingend notwendig sind.[2] Durch die *-Kapitel kann sich der Leser einen Überblick verschaffen, mit welchen Inhalten sich andere inner- und außermathematische Fachbereiche beschäftigen, bei denen eine Beziehung zur Analysis besteht.

Dieses Lehrbuch basiert auf der Grundvorlesung zur Analysis I–III, welche von Friedrich Tomi an der Universität Heidelberg in den Jahren 2004–2005 gehalten wurde. Wir, die Autoren, wollen Friedrich Tomi von ganzem Herzen danken, denn er hat nicht nur das Fundament unseres eigenen Analysiswissens gelegt, sondern auch unser allgemeines Verständnis von Mathematik entscheidend mitgeprägt. Einige der *-Kapitel sind an ein Skriptum von Rolf Rannacher angelehnt, von welchem die Autoren ihre numerische Grundausbildung erhalten haben. Dafür möchten sich die Autoren bei Rolf Rannacher herzlichst bedanken. Außerdem dankt der zweitgenannte Autor Martin Möller, ohne den er niemals in dieser Weise gelernt hätte, sein Wissen aus den verschiedenen mathematischen Teildisziplinen miteinander zu verknüpfen.

Des Weiteren bedanken wir uns bei David John, Clemens Kienzler, Cornelia Spreitzer und Christoph Zimmer für ihre konstruktiven Verbesserungsvorschläge. Andreas Sauer danken wir für seinen Hinweis auf den Zwischenwertsatz der Ableitung. Für die überaus freundliche und kompetente Betreuung seitens des Springer-Verlags sind wir Annika Denkert und Bianca Alton sehr dankbar.

Für die liebevolle Unterstützung und ihr Verständnis, wenn die Abende vor dem Rechner etwas länger wurden, möchte sich Adrian Hirn herzlichst bei Regina Fischer bedanken, die ihm unendlich viel bedeutet.

[1] Unter einem *Lemma* verstehen wir eine Hilfsaussage. Diese werden oft zum Beweis eines größeren Resultats, genannt *Satz*, herangezogen. Kleinere Resultate werden *Proposition* genannt. Eine *Folgerung* ist eine unmittelbare Konsequenz aus einem Satz.

[2] Sie können deshalb beim ersten Durcharbeiten dieses Lehrbuchs bedenkenlos übergangen werden, ohne dabei das weitere Verständnis des Stoffes irgendwie zu gefährden.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis