
Analysis – Grundlagen und Exkurse

Adrian Hirn · Christian Weiß

Analysis – Grundlagen und Exkurse

Grundprinzipien der Differential-
und Integralrechnung

Prof. Dr. Adrian Hirn
Fakultät Grundlagen
Hochschule Esslingen
Göppingen
Deutschland

Prof. Dr. Christian Weiß
Institut Naturwissenschaften
Hochschule Ruhr West
Mülheim an der Ruhr
Deutschland

Die Darstellung von manchen Formeln und Strukturelementen war in einigen elektronischen Ausgaben nicht korrekt, dies ist nun korrigiert. Wir bitten damit verbundene Unannehmlichkeiten zu entschuldigen und danken den Lesern für Hinweise.

ISBN 978-3-662-55537-8 ISBN 978-3-662-55538-5 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-55538-5>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Als Teilgebiet der Mathematik umfasst die klassische Analysis die Differential- und Integralrechnung, deren Grundlagen von Gottfried W. Leibniz (1646–1716) und Sir Isaac Newton (1643–1727) bereits im 17. Jahrhundert unabhängig voneinander geschaffen wurden. In den über 400 Jahren, die seitdem vergangen sind, hat sich der Blickwinkel auf die Analysis immer wieder gewandelt. Zunächst wurden die verschiedenen mathematischen Disziplinen – neben der Analysis ist hier die Algebra das andere klassische Beispiel – als weitgehend unabhängig voneinander gesehen und entsprechend verliefen diverse Entwicklungen parallel. Spätestens in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts rückte aber die Erforschung der Interaktion der verschiedenen Zweige der Mathematik immer mehr in den Vordergrund. Erst dadurch konnten viele langjährig offenen mathematischen Fragestellungen beantwortet werden. Ein Musterbeispiel hierfür ist der sogenannte *letzte Satz von Fermat*, der besagt, dass es für jede natürliche Zahl n größer 2 keine Lösung der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

gibt, für die x, y und z selbst natürliche Zahlen sind. Der Beweis von Andrew Wiles (*1953) verknüpft auf geradezu virtuose Weise Erkenntnisse aus Algebra und Analysis. Anwendungen der Analysis finden sich jedoch nicht nur in vielen anderen Teilgebieten der Mathematik, sondern beispielsweise auch in den Naturwissenschaften, der Ingenieurstechnik und in der Erforschung der Finanzmärkte. Für einen vollständig ausgebildeten Mathematiker ist dies keine Neuigkeit, jedoch erfordert es viele Jahre intensiven Studiums, diese Zusammenhänge selbstständig zu erkennen. Das vorliegende Lehrbuch versucht deshalb, genau diesen Aspekt der Anwendungen verstärkt aufzugreifen. Gemeinsam mit dem zweiten Band beinhaltet es den gesamten Lehrstoff einer zwei- bis dreisemestrigen Analysis-Grundvorlesung, wie er an deutschen Universitäten typischerweise gelehrt wird.

Um Analysis (sinnvoll) betreiben zu können, ist es zunächst notwendig, die Grundlagen von Folgen und Reihen zu erarbeiten. Hierauf fußt letztlich der gesamte weitere Inhalt dieses Buchs. Um möglichst schnell zu diesem Themengebiet vorzustoßen und dennoch

eine in sich abgeschlossene Darstellung zu haben, haben wir uns dazu entschlossen, die reellen Zahlen axiomatisch einzuführen. Das heißt, dass wir auf eine algebraisch exakte Definition, die auf der Axiomatik von Giuseppe Peano (1858–1932) und der Konstruktion via Äquivalenzklassen beruht, nur am Rande eingehen. Diese alternative Herangehensweise ist in zahlreichen Lehrbüchern der Algebra zu finden, wie zum Beispiel in dem gleichsam lesenswerten wie verständlichen Buch [Ebb92]. Danach klären wir elementare Grundbegriffe der Analysis: Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit, Differentiation, Integration nach Riemann. In diesem Zusammenhang werden auch gewöhnliche Differentialgleichungen und die numerische Approximation ihrer Lösungen besprochen. Schließlich befassen wir uns mit Wegintegralen und geben Einblicke in die komplexe Analysis. Damit ist der Inhalt abgedeckt, der einem Studierenden nach den ersten beiden Semestern bekannt sein sollte.

Beim Verfassen haben wir großen Wert darauf gelegt,

- mit klarer Struktur möglichst schnell zu den zentralen Aussagen der Analysis vorzustoßen.
- ein in sich geschlossenes Lehrbuch zu verfassen, also ein vollständiges Gedankengerüst zu erschaffen, für dessen Entwicklung keine weitere Literatur benötigt wird.
- die Beziehung der Analysis zu anderen Teilgebieten der Mathematik aufzuzeigen.
- die Bedeutung der Analysis für praktische Anwendungen sichtbar zu machen.

Es wird in Fachkreisen immer wieder die Frage diskutiert, ob Analysis sinnvollerweise bereits zu Beginn des Studiums mehrdimensional behandelt werden soll oder ob man sich zunächst auf den eindimensionalen Fall beschränken soll. Für den mehrdimensionalen Ansatz ist das wesentliche Argument seine Allgemeinheit und das Vermeiden von Wiederholungen. Jedoch haben wir die zweite Variante gewählt: Einerseits halten wir diese Herangehensweise für didaktisch besser, weil sie den zu Beginn doch recht steilen Weg zur Analysis wenigstens ein bisschen ebnet, andererseits erschließt man bereits im Eindimensionalen viele der wesentlichen Denkweisen und Erkenntnisse der Analysis. Dem Leser wird der mehrdimensionale Fall so wesentlich einfacher fallen, ohne dass er dabei einen Verlust erlitten hätte.

In diesem Lehrbuch werden alle wesentlichen Aussagen der Analysis ausführlich bewiesen und notwendige Resultate aus der linearen Algebra in [Kap. 10](#) umfangreich zusammengefasst. Für ein intensives Studium der linearen Algebra, die sozusagen das zweite Standbein der Grundausbildung eines modernen Mathematikers ist, empfehlen wir beispielsweise das Lehrbuch [Fis13], das vor Kurzem in einer rundum überarbeiteten Neuauflage erschienen ist. Wir haben uns ganz bewusst dazu entschieden, die klassische Satz-Beweis-Struktur

beizubehalten, um den Blickpunkt auf das Wesentliche zu lenken.¹ Mit klarer Struktur kommen wir so zu den zentralen Aussagen der Analysis voran. Regelmäßig werden dabei inhaltliche Beziehungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik herausgearbeitet und Anwendungen in der Praxis aufgezeigt. So wird dem Leser die weitreichende Bedeutung der Analysis vermittelt und dem Studierenden ermöglicht, beurteilen zu können, welche Fachrichtung für sein weitergehendes Mathematik-Studium interessant sein könnte. Dazu ergänzen wir den üblichen Lehrstoff um sogenannte *-Kapitel, welche für die weitere Entwicklung des analytischen Grundgerüsts nicht zwingend notwendig sind.² Durch die *-Kapitel kann sich der Leser einen Überblick verschaffen, mit welchen Inhalten sich andere inner- und außermathematische Fachbereiche beschäftigen, bei denen eine Beziehung zur Analysis besteht.

Dieses Lehrbuch basiert auf der Grundvorlesung zur Analysis I–III, welche von Friedrich Tomi an der Universität Heidelberg in den Jahren 2004–2005 gehalten wurde. Wir, die Autoren, wollen Friedrich Tomi von ganzem Herzen danken, denn er hat nicht nur das Fundament unseres eigenen Analysiswissens gelegt, sondern auch unser allgemeines Verständnis von Mathematik entscheidend mitgeprägt. Einige der *-Kapitel sind an ein Skriptum von Rolf Rannacher angelehnt, von welchem die Autoren ihre numerische Grundausbildung erhalten haben. Dafür möchten sich die Autoren bei Rolf Rannacher herzlichst bedanken. Außerdem dankt der zweitgenannte Autor Martin Möller, ohne den er niemals in dieser Weise gelernt hätte, sein Wissen aus den verschiedenen mathematischen Teildisziplinen miteinander zu verknüpfen.

Des Weiteren bedanken wir uns bei David John, Clemens Kienzler, Cornelia Spreitzer und Christoph Zimmer für ihre konstruktiven Verbesserungsvorschläge. Andreas Sauer danken wir für seinen Hinweis auf den Zwischenwertsatz der Ableitung. Für die überaus freundliche und kompetente Betreuung seitens des Springer-Verlags sind wir Annika Denkert und Bianca Alton sehr dankbar.

Für die liebevolle Unterstützung und ihr Verständnis, wenn die Abende vor dem Rechner etwas länger wurden, möchte sich Adrian Hirn herzlichst bei Regina Fischer bedanken, die ihm unendlich viel bedeutet.

¹Unter einem *Lemma* verstehen wir eine Hilfsaussage. Diese werden oft zum Beweis eines größeren Resultats, genannt *Satz*, herangezogen. Kleinere Resultate werden *Proposition* genannt. Eine *Folgerung* ist eine unmittelbare Konsequenz aus einem Satz.

²Sie können deshalb beim ersten Durcharbeiten dieses Lehrbuchs bedenkenlos übergangen werden, ohne dabei das weitere Verständnis des Stoffes irgendwie zu gefährden.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----|
| 1 | Grundlegendes | 1 |
| 2 | Zahlen | 11 |
| 2.1 | Die Axiome der reellen Zahlen | 11 |
| 2.2 | Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion | 18 |
| 2.3 | Wurzeln | 29 |
| 2.4 | Der euklidische Raum \mathbb{R}^d und die komplexen Zahlen | 33 |
| 2.5 | Exkurs: Quaternionen* | 43 |
| 2.6 | Übungsaufgaben | 47 |
| 3 | Folgen und Reihen | 51 |
| 3.1 | Folgen | 51 |
| 3.2 | Reihen | 63 |
| 3.3 | Konvergente Folgen in \mathbb{R}^d | 68 |
| 3.4 | Reihen in \mathbb{R}^d | 71 |
| 3.5 | Exkurs: Finanzmathematik* | 77 |
| 3.6 | Exkurs: Konstruktion der reellen Zahlen* | 80 |
| 3.7 | Übungsaufgaben | 83 |
| 4 | Stetigkeit | 87 |
| 4.1 | Grenzwerte von Funktionen | 87 |
| 4.2 | Stetige Funktionen | 93 |
| 4.3 | Die Exponentialfunktion und aus ihr abgeleitete Funktionen | 102 |
| 4.4 | Konvergenz von Funktionenfolgen | 118 |
| 4.5 | Exkurs: Chaostheorie* | 124 |
| 4.6 | Übungsaufgaben | 130 |
| 5 | Differentialrechnung | 135 |
| 5.1 | Differenzierbare Funktionen | 135 |
| 5.2 | Der Mittelwertsatz | 142 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 5.3 | Höhere Ableitungen und die Taylor-Entwicklung | 153 |
| 5.4 | Exkurs: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen* | 163 |
| 5.5 | Übungsaufgaben | 171 |
| 6 | Das eindimensionale Riemannsche Integral | 173 |
| 6.1 | Definition des Riemann-Integrals | 174 |
| 6.2 | Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation | 186 |
| 6.3 | Uneigentliche Integrale | 191 |
| 6.4 | Übungsaufgaben | 196 |
| 7 | Gewöhnliche Differentialgleichungen | 201 |
| 7.1 | Einige elementare Lösungsmethoden | 201 |
| 7.2 | Das Anfangswertproblem – Existenz und Eindeutigkeit | 215 |
| 7.3 | Exkurs: Numerische Lösung von Differentialgleichungen* | 238 |
| 7.4 | Übungsaufgaben | 245 |
| 8 | Differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher | 247 |
| 8.1 | Richtungsableitung und partielle Ableitung | 247 |
| 8.2 | Das Differential | 249 |
| 8.3 | Die Kettenregel | 253 |
| 8.4 | Höhere partielle Ableitungen und Differentiale | 258 |
| 8.5 | Taylor-Formel und Extremwerte | 263 |
| 8.6 | Exkurs: Ausgleichsrechnung* | 269 |
| 8.7 | Übungsaufgaben | 271 |
| 9 | Wegintegrale | 273 |
| 9.1 | Das Wegintegral und seine Eigenschaften | 274 |
| 9.2 | Existenz eines Potentials | 281 |
| 9.3 | Komplexe Kurvenintegrale | 287 |
| 9.4 | Exkurs: Die Cauchysche Integralformel* | 291 |
| 9.5 | Exkurs: Primzahlen und die Riemannsche Zetafunktion* | 298 |
| 9.6 | Übungsaufgaben | 302 |
| 10 | Lineare Algebra | 305 |
| 10.1 | Lineare Gleichungssysteme | 305 |
| 10.2 | Lineare Abbildungen | 306 |
| 10.3 | Determinanten | 312 |
| 10.4 | Eigenwerte und Bilinearformen | 315 |
| 10.5 | Polynome | 321 |
| 11 | Lösungen der Aufgaben | 323 |
| 11.1 | Aufgaben zu Kap. 2 | 323 |
| 11.2 | Aufgaben zu Kap. 3 | 329 |
| 11.3 | Aufgaben zu Kap. 4 | 337 |
| 11.4 | Aufgaben zu Kap. 5 | 343 |

| | |
|-----------------------------------|------------|
| 11.5 Aufgaben zu Kap. 6 | 346 |
| 11.6 Aufgaben zu Kap. 7 | 353 |
| 11.7 Aufgaben zu Kap. 8 | 358 |
| 11.8 Aufgaben zu Kap. 9 | 362 |
| Literatur | 367 |
| Stichwortverzeichnis | 369 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----|
| Abb. 1.1 | Kommutatives Diagramm | 8 |
| Abb. 2.1 | Konvexität des Graphen $x \mapsto x^n$ | 29 |
| Abb. 2.2 | Winkel φ zwischen zwei Vektoren | 35 |
| Abb. 2.3 | Senkrecht stehende Vektoren | 35 |
| Abb. 2.4 | Vektoren im Beweis der (Cauchy-)Schwarzschen Ungleichung | 36 |
| Abb. 2.5 | Streckung eines Vektors \vec{z} um den Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ | 39 |
| Abb. 3.1 | Intervallschachtelung im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß | 60 |
| Abb. 4.1 | Stetige Funktion ohne stetige Umkehrfunktion | 99 |
| Abb. 4.2 | Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ | 106 |
| Abb. 4.3 | Graphische Darstellung von $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$ für $z \in \mathbb{R}$ | 108 |
| Abb. 4.4 | Die Argumentfunktion | 114 |
| Abb. 4.5 | Kommutatives Diagramm | 130 |
| Abb. 5.1 | Sekanten (gepunktet) und Tangente (gestrichelt) | 136 |
| Abb. 5.2 | Geometrische Veranschaulichung des Mittelwertsatzes | 143 |
| Abb. 5.3 | Graphische Darstellung der Newton-Iteration. | 166 |
| Abb. 6.1 | Zusammenhang zwischen Integration und Flächenberechnung | 174 |
| Abb. 6.2 | Unter- und Obersummen beim Riemannsches Integral | 175 |
| Abb. 6.3 | Integral der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ | 191 |
| Abb. 8.1 | Wohldefiniertheit der Richtungsableitung | 248 |
| Abb. 8.2 | Konvexe Menge | 256 |
| Abb. 8.3 | Anwendbarkeit des Mittelwertsatzes | 256 |
| Abb. 9.1 | Zusammensetzung von Wegen | 276 |
| Abb. 9.2 | Inverser Weg | 277 |
| Abb. 9.3 | Wegzusammenhängende Menge | 277 |
| Abb. 9.4 | Nullhomotopie | 278 |
| Abb. 9.5 | Sternförmige Menge | 283 |
| Abb. 9.6 | $\mathbb{R}^3 \setminus$ Achse nicht einfach zusammenhängend | 283 |
| Abb. 9.7 | Darstellung des Integrationswegs aus Beispiel 9.20 | 291 |