

---

# Aufgabensammlung Numerik

---

Hans-Jürgen Reinhardt

# Aufgabensammlung Numerik

mit mehr als 250 gelösten  
Übungsaufgaben

 Springer Spektrum

Hans-Jürgen Reinhardt  
Department Mathematik  
Universität Siegen  
Siegen, Deutschland

ISBN 978-3-662-55452-4  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-55453-1>

ISBN 978-3-662-55453-1 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature  
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland  
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

# Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung entstand während der entsprechenden Vorlesungen des Autors an der Universität Siegen in den Jahren 1989 bis 2015. Es sind Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen zu allen Themen der einführenden Numerik und weiterführender Numerik-Vorlesungen wie die Numerik gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen zusammengestellt. Die Aufgaben sind von 1 bis 143 nummeriert. Da aber die Aufgaben meist noch unterteilt sind, finden sich hier insgesamt ca. 260 gelöste Aufgaben. Jede Aufgabe hat mit Stichworten eine Art Überschrift. Diese Stichworte sind im Index aufgelistet. Somit kann man über den Index die zu einem Stichwort zugehörigen Aufgaben finden.

Die Reihenfolge der Themen orientiert sich in etwa am Verlauf einer entsprechenden Vorlesung zur Einführung in die Numerik, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Methode der Finiten Elemente sowie Differenzenapproximationen partieller Differentialgleichungen. Die Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich in Kap. 1 an Stummelhainer [23], 1.–10., und in Kap. 2 an [18]. Wenn Hilfsergebnisse für die Aufgaben verwendet werden, ist dies mit entsprechenden Literaturhinweisen angegeben. Zu zahlreichen Aufgaben sind vorab Lösungshinweise gegeben. Je nach Kenntnisstand der Hörer können diese weggelassen oder ergänzt werden. Analoges gilt für die z. T. umfangreichen vorangestellten Erläuterungen zum Verständnis der Aufgaben. Bei einigen Aufgaben sind die Lösungen sehr umfangreich – hierbei könnten auch Teile der Lösungen als separate Aufgaben gestellt werden

Neben den Literaturhinweisen ist am Ende auch eine Liste mit Symbolen und Abkürzungen zusammengestellt. Die Bezeichnungen sind allerdings nicht immer einheitlich, was auch in der Symbolliste berücksichtigt ist. Es ist aber aus dem Zusammenhang heraus ersichtlich, was jeweils gemeint ist.

Eine Zielgruppe für diese Aufgabensammlung sind Kollegen, die als Dozenten ausgearbeitete Beispiele für ihre Vorlesungen suchen und diese vorstellen wollen. Natürlich eignen sich die ausgearbeiteten Übungsaufgaben auch für Übungen und Tutorien und – die einfachen Aufgaben – auch für Klausuren. Eine weitere Zielgruppe sind Studierende, für die die hier vorgelegte Aufgabensammlung eine Quelle für Eigenstudium, für häusliche Nacharbeitung des Vorlesungsstoffes und insbesondere für Klausurvorbereitungen ist.

Parallel zu dieser Aufgabensammlung sind noch zwei Aufgabensammlungen von jeweils vergleichbarem Umfang erstellt worden, und zwar zur eindimensionalen Analysis (s. [19]) sowie zur Analysis 2, Funktionalanalysis und Differentialgleichungen (s. [20]). Bei mehreren Aufgaben dieser Sammlung werden Ergebnisse aus [19] verwendet. Die Thematik einiger Aufgaben dieser Sammlung könnte auch zu einer Analysis 1 oder Analysis 2-Vorlesung passen. Weitere Aufgaben zur Thematik von Kap. 2 finden sich in [18]. Die Aufgaben von Abschn. 3.1 könnten auch in [20], Kap. Funktionalanalysis, stehen; umgekehrt sind Aufgaben von dort auch grundlegend für die Methode der Finiten Elemente (Abk.: FEM).

Die Aufgaben dieser Sammlung sind im Laufe des genannten Zeitraums von 26 Jahren gestellt worden. Sicherlich finden sich daher Aufgaben aus der vorliegenden Sammlung auch in Lehrbüchern, im Internet oder anderen Aufgabensammlungen. Hervorzuheben ist, dass es in diesem Buch zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen gibt - bei einigen Aufgaben auch alternative Lösungsvorschläge. Die Standard-Lehrbücher zu den genannten Gebieten und Beispiele anderer Aufgabensammlungen sind im Literaturverzeichnis aufgeführt.

Bei der Auswahl, Zusammenstellung und Ausarbeitung und dem TeXen der Übungsaufgaben sowie der Erstellung der Grafiken haben in den genannten Jahren meine Mitarbeiter Frank Seiffarth, Mathias Charton, Reinhard Ansorge, Thorsten Raasch, Ivan Cherlemyak, Stefan Schuss und Timo Dornhöfer mitgewirkt, denen ich dafür besonders dankbar bin. Mein Dank gilt auch – und vor allem – meinen beiden Sekretärinnen, Margot Beier und Kornelia Mielke. Sie haben sich um das TeXen der Aufgaben von einer ersten Aufgabensammlung im Jahre 1994 bis zu dieser Zusammenstellung verdient gemacht.

Diese Aufgabensammlung ist mehrfach sorgfältig durchgesehen worden. Vermutlich gibt es aber kein Skript oder Buch, das völlig fehlerfrei ist. Dies gilt sicher auch für diese Aufgabensammlung. Falls Sie Fehler finden, lassen Sie es mich bitte wissen (reinhardt@mathematik.uni-siegen.de).

Siegen im August 2017.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Numerik, Grundlagen</b> . . . . .	1
1.1	Berechnung von Funktionen und Nullstellen . . . . .	1
1.2	Interpolation, Numerische Differentiation, Numerische Integration . . . . .	27
1.3	Numerische lineare Algebra . . . . .	59
1.4	Nichtlineare Gleichungssysteme und Eigenwertaufgaben bei Matrizen . . . . .	113
<b>2</b>	<b>Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen</b> . . . . .	149
2.1	Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme . . . . .	149
2.2	Mehrschrittverfahren für Anfangswertprobleme . . . . .	176
2.3	Differenzenapproximationen von Randwertproblemen . . . . .	191
<b>3</b>	<b>Die Methode der Finiten Elemente</b> . . . . .	209
3.1	Funktionalanalytische Grundlagen der FEM . . . . .	209
3.2	FEM für Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	221
3.3	Finite Elemente in mehreren Veränderlichen . . . . .	239
<b>4</b>	<b>Numerik partieller Differentialgleichungen</b> . . . . .	253
4.1	Laplace- und Poisson-Gleichung . . . . .	253
4.2	Anfangsrandwertprobleme . . . . .	272
	<b>Liste von Symbolen und Abkürzungen</b> . . . . .	297
	<b>Literatur</b> . . . . .	301
	<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	303