
Lineare Optimierung

Winfried Hochstättler

Lineare Optimierung

Winfried Hochstättler
Fakultät Mathematik und Informatik
FernUniversität in Hagen
Hagen
Deutschland

Die Darstellung von manchen Formeln und Strukturelementen war in einigen elektronischen Ausgaben nicht korrekt, dies ist nun korrigiert. Wir bitten damit verbundene Unannehmlichkeiten zu entschuldigen und danken den Lesern für Hinweise.

ISBN 978-3-662-54424-2 ISBN 978-3-662-54425-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-54425-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Die „Lineare Optimierung“ ist ein fachübergreifendes Thema, das in Mathematik, Informatik und den Wirtschaftswissenschaften seinen festen Platz in der Lehre hat. Im Bachelor der Mathematik der FernUniversität in Hagen ist sie ein Pflichtmodul. Ausgangspunkt für dieses Buch war die Fragestellung, was wir jedem unserer Studierenden der Mathematik aus diesem weiten Feld mit auf den Weg geben möchten.

An den Anfang stellen wir die Modellierung. Dabei beschränken wir uns aber auf Textbuchprobleme, die man noch händisch, ohne Benutzung einer Modellierungssprache, aufstellen kann. Indem wir die entstehenden Modelle unter Rechneinsatz lösen lassen, können wir einige potenzielle Fehler und Phänomene diskutieren.

Nach einer kurzen Wiederholung der Linearen Algebra kommen wir direkt zu einem Herzstück des Textes, Farkas' Lemma und der linearen Optimierungsdualität. Der hier vorgestellten homogenen Version von Farkas' Lemma begegnet man in Lehrbüchern erstaunlich selten. Der zugehörige Beweis ist definitiv „from the book“, gilt aber als Folklore. Er ermöglicht es, die klassische Theorie der Linearen Optimierung innerhalb von \mathbb{Q} zu betreiben, was Informatikern und diskreten Mathematikern entgegen kommt.

Für uns gehören die klassischen Sätze von Minkowski und Weyl, wie auch die Polarität von polyedrischen Kegeln und Polyedern, in jede mathematische Veranstaltung zur Linearen Optimierung. Diesen Teil der Polyedertheorie diskutieren wir ausführlich und detailliert. Damit wollen wir auch die geometrische Intuition, die in der Linearen Algebra vermittelt wurde, weiter entwickeln.

Bei der Darstellung des Simplexverfahrens haben wir uns bemüht, vor allem den direkten Zusammenhang zwischen der geometrischen Vorstellung einer Ecken-Kanten-Wanderung im Polyeder und der algebraischen Sichtweise im Tableau herauszuarbeiten. Darüber hinaus präsentieren wir den Simplexalgorithmus als primales Verfahren, das terminiert, wenn das Tableau auch dual zulässig geworden ist. Damit bedürfen duale Simplexschritte keiner weiteren ausführlichen Erläuterung. Schließlich vertiefen wir das Verständnis des Zusammenspiels zwischen Geometrie und Algebra, indem wir die Upper Bound Technique diskutieren. Selbstverständlich kommen auch Bland's Rule, dessen Korrektheit wir explizit

beweisen, das revidierte Verfahren und die 2-Phasentechnik zur Bestimmung einer zulässigen Lösung zu ihren Rechten.

Nach unserer Ansicht sollte kein Mathematiker darum herumkommen, die zentrale Fragestellung der Komplexitätstheorie, ob $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ist, zur Kenntnis zu nehmen. Zunächst stellen wir dafür einige benötigte Begrifflichkeiten bereit und diskutieren die Komplexität des Simplexverfahrens. Damit man eine Vorstellung davon entwickeln kann, wie „unschuldig“ ein Beispiel mit exponentieller Laufzeit aussehen kann, rechnen wir eine Klasse von Klee-Minty-Cubes explizit durch. Die mittlere Laufzeit des Simplex-Verfahrens diskutieren wir weniger wegen der praktischen Relevanz des Resultates, die wir durchaus kritisch sehen, sondern eher wegen der geometrisch schönen Argumente im Beweis und der Anwendung der Ergebnisse der Polyeder- und der Dualitätstheorie. Einen praktischen Bezug hat hingegen die Dantzig-Wolfe Dekomposition mit der wir auch die Technik der Spaltenerzeugung anreißen können.

Als nächstes setzen wir unseren Abstecher in die Komplexitätstheorie fort. Mit der Ellipsoidmethode präsentieren wir dann das historisch erste Verfahren zur Linearen Optimierung mit polynomialer Laufzeit. Wir diskutieren, warum es sich hier wohl nicht um ein numerisch stabil implementierbares Verfahren handelt. Theoretisch ist es dagegen sehr bedeutend, da man mit seiner Hilfe die Äquivalenz von Optimieren und Separieren zeigen kann; ein Resultat von großer Tragweite in der kombinatorischen Optimierung. Als nichtlineares Verfahren hat man bei der Ellipsoidmethode aus Sicht der Informatik allerdings Probleme mit der exakten Arithmetik. Wie man diese mathematisch löst, diskutieren wir hier aber nicht mehr.

Mit dem letzten Kapitel verlassen wir nun endgültig heimisches, diskretes Terrain. Schon für das vorletzte Kapitel mussten wir den Körper \mathbb{Q} verlassen und mit Näherungsverfahren argumentieren. Wir sehen uns zwei polynomiale Verfahren für die Lineare Optimierung näher an, die ursprünglich aus der Nichtlinearen Optimierung stammen. Da ist zunächst das Karmarkar-Verfahren, welches das erste praktikable, polynomiale Verfahren war. Wir diskutieren die einfache geometrische Idee und führen alle Rechnungen zum Nachweis der Komplexität explizit durch. Das zweite diskutierte Innere-Punkt-Verfahren ist ein pfadverfolgender Algorithmus. Hier stellen wir die zugehörige Theorie und die geometrischen Ideen vor.

Das Buch wurde im Laufe der Jahre meiner Lehrtätigkeit aus verschiedenen Quellen gespeist. Zum einen möchte ich für den klassischen Teil die Vorlesung meines akademischen Lehres Achim Bachem und das Skriptum seines akademischen Bruders Martin Grötschel erwähnen. Die Darstellung der komplexitätstheoretischen Aspekte des Simplexverfahrens ist an ein Lehrbuch von Alexander Schrijver angelehnt. Für den „indiskreten Teil“ in den letzten beiden Kapiteln habe ich mich an einem Preprint von Tamás Terlaky und seinem Buch mit Roos und Vial orientiert.

Bedanken möchte ich mich auch bei Studierenden der FernUniversität für zahlreiche Hinweise auf „Tippfehler und mehr“ in Vorläufern dieses Textes. Besonderen

Dank schulde ich Alexander Malkis, der mich auf (mindestens) zwei Stellen aufmerksam gemacht hat, an denen ich den Körper \mathbb{Q} unbemerkt verlassen hatte, wo dies nicht nötig war. Darüber hinaus bedanke ich mich bei Stephan Dominique Andres, Immanuel Albrecht, Sylvia Sikora und Michael Wilhelmi für ihre Mitarbeit.

Hagen, im Januar 2017

Winfried Hochstättler

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Optimierung - Aufgabenstellung und Modellbildung	1
1.1	Erste Beispiele	2
1.1.1	Ein Diätproblem	2
1.1.2	Gier ist nicht immer gut	4
1.1.3	Ein Mischungsproblem	7
1.2	Die allgemeine lineare Optimierungsaufgabe	9
1.2.1	Techniken zur äquivalenten Umformung	11
1.3	Lösen lassen	16
1.3.1	Das Diätproblem	17
1.3.2	Von Nudeln zu Kartoffeln	19
1.4	Die graphische Methode	20
2	Hüllen und Kombinationen	25
2.1	Affine Unterräume des \mathbb{K}^n	25
2.2	Konvexe Kegel im \mathbb{K}^n	28
2.3	Konvexe Mengen im \mathbb{K}^n	31
2.4	Zusammenfassung	35
3	Dualität	39
3.1	Eine andere Sicht auf das Diätproblem	40
3.2	Farkas' Lemma	41
3.3	Der Dualitätssatz der Linearen Programmierung	48
3.4	Dualisieren von Linearen Programmen	53
3.5	Der Satz vom komplementären Schlupf	54
4	Polyeder	57
4.1	Zweiklassengesellschaft?	57
4.2	Seitenflächen	58
4.3	Facetten	62
4.4	Ecken und Kanten	64
4.5	Zum Beispiel das Permutahedron	66
4.6	Der Seitenflächenverband	72
4.7	Kegel und die „dichte Version“ von Farkas' Lemma	73

4.8	Der Satz von Weyl.....	77
4.9	Der Polarisierungstrick für Kegel und der Satz von Minkowski	78
4.10	Polarität und verbandstheoretische Dualität.....	80
4.11	Der Fundamentalsatz der Polyedertheorie	83
4.12	Polarität von Polytopen.....	90
4.13	Fourier-Motzkin Elimination.....	92
5	Das Simplexverfahren.....	95
5.1	Das 1-Skelett eines Polytops	95
5.2	Die geometrische Idee des Simplexalgorithmus.....	99
5.3	Wiederholung Gauß-Jordan-Algorithmus.....	108
5.4	Tableauform des Simplexalgorithmus	109
5.5	Pivotwahl, Entartung, Endlichkeit	112
5.6	Bemerkungen zur Numerik.....	117
5.7	Die Zweiphasenmethode	118
5.8	Die Big- <i>M</i> -Methode.....	123
5.9	Der revidierte Simplexalgorithmus	127
5.10	Postoptimierung und Sensitivitätsanalyse.....	130
5.11	Duale Simplexschritte	131
5.12	Obere Schranken	134
5.13	The Name of the Game.....	138
6	Zur Komplexität des Simplexalgorithmus.....	141
6.1	Streng polynomiale Algorithmen und ein fraktionaler Rucksack	141
6.2	Personaleinsatzplanung.....	144
6.3	Klee-Minty Cubes	152
6.4	Die mittlere Laufzeit des Simplexalgorithmus.....	159
6.5	Dantzig-Wolfe Dekomposition	166
6.6	Anhang: Die Landau-Symbole	174
7	Die Ellipsoidmethode	177
7.1	Reduktionen bei algorithmischen Problemen	177
7.2	Zur Kodierungslänge der Lösungen von Linearen Programmen	182
7.3	Zulässigkeitstest und Optimierung	188
7.3.1	Ausnutzung der Dualität	188
7.3.2	Binäre Suche	189
7.4	Die geometrische Idee der Ellipsoidmethode	190
7.5	Die Ellipsoidmethode in der Linearen Programmierung	194
7.6	Wie löst man das Problem mit der exakten Arithmetik?	199
7.7	Optimieren und Separieren	200
7.8	Ein mathematischer Sputnik	203
7.9	Anhang: Formeln und Normalformen in der Aussagenlogik.....	203

8 Innere-Punkt-Methoden	207
8.1 Das Karmarkar-Verfahren.....	208
8.1.1 Die projektive Transformation des Einheitssimplex	208
8.1.2 Die geometrische Idee des Karmarkar-Verfahrens	210
8.1.3 Zur Korrektheit und Laufzeitanalyse	212
8.1.4 Die Karmarkar-Normalform	220
8.2 Ein pfadverfolgender Algorithmus	221
8.2.1 Geometrische Ideen	221
8.2.2 Einige Vorbereitungen	222
8.2.3 Das schiefsymmetrisch selbstduale Modell	224
8.2.4 Der zentrale Pfad und die optimale Partition	227
8.2.5 Finden der optimalen Partition	234
8.2.6 Finden einer exakten Lösung	236
8.2.7 Ein generisches Innere-Punkt-Verfahren	239
8.3 Ausblick.....	244
9 Lösungsvorschläge zu den Übungen	245
9.1 Lösungsvorschläge zu Kap. 1	245
9.2 Lösungsvorschläge zu Kap. 2	250
9.3 Lösungsvorschläge zu Kap. 3	254
9.4 Lösungsvorschläge zu Kap. 4	259
9.5 Lösungsvorschläge zu Kap. 5	267
9.6 Lösungsvorschläge zu Kap. 6	280
9.7 Lösungsvorschläge zu Kap. 7	285
9.8 Lösungsvorschläge zu Kap. 8	290
Literaturverzeichnis	301
Sachverzeichnis	303

Notation

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$ I $	Anzahl der Elemente einer endlichen Menge I
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{K}	ein Zwischenkörper von \mathbb{Q} und \mathbb{R}
$\mathbb{K}_+ = \{x \in \mathbb{K} \mid x \geq 0\}$	Menge der nicht-negativen Zahlen aus \mathbb{K}
$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$	abgeschlossenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$] \alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha < x \leq \beta\}$	links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$[\alpha, \beta [= \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha \leq x < \beta\}$	links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$] \alpha, \beta [= \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha < x < \beta\}$	offenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$[\alpha, \infty] = \{x \in \mathbb{K} \mid x \geq \alpha\} \cup \{\infty\}$	Menge der Zahlen $\geq \alpha$ aus \mathbb{K} zuzüglich ∞ für $\alpha \in \mathbb{K}$
$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \ x - x_0\ < \varepsilon\}$	die offene ε -Umgebung um x_0
$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_j \in \mathbb{K} \ 1 \leq j \leq n \right\}$	n -dimensionaler Spaltenraum über \mathbb{K}

$e^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (j)$	j -ter Einheitsvektor von \mathbb{K}^n für $1 \leq j \leq n$
$\mathbb{K}^{m \times n}$	Menge der $m \times n$ -Matrizen über \mathbb{K}
I_n	n -reihige Einheitsmatrix
A^\top	Transponierte einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$c^\top x$	Skalarprodukt der Vektoren $c, x \in \mathbb{K}^n$
$S^\perp = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \forall s \in S: s^\top x = 0\}$	orthogonales Komplement einer Menge $S \subseteq \mathbb{K}^n$
$\text{rg } A$	Rang einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$\det A$	Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$\ker A = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$	Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
A_{ij}	Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
A_S	die Untermatrix von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, die aus den mit S indizierten Zeilen gebildet wird
A_j	die j -te Spalte der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
$A_{,S}$	die Untermatrix von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, die von den mit S indizierten Spalten gebildet wird.
c_S	der Teilvektor von $c \in \mathbb{K}^n$, der von den mit S indizierten Koordinaten gebildet wird.
\subset	Teilmenge aber nicht gleich.
$A \dot{\cup} B$	die disjunkte Vereinigung von A und B . Es wird also mit dem Punkt über dem Vereinigungszeichen gefordert, dass $A \cap B = \emptyset$.
\ln	der natürliche Logarithmus.
$A \Delta B$	die symmetrische Differenz zweier Mengen