Lineare Optimierung

Winfried Hochstättler

Lineare Optimierung

Springer Spektrum

Winfried Hochstättler
Fakultät Mathematik und Informatik
FernUniversität in Hagen
Hagen
Deutschland

Die Darstellung von manchen Formeln und Strukturelementen war in einigen elektronischen Ausgaben nicht korrekt, dies ist nun korrigiert. Wir bitten damit verbundene Unannehmlichkeiten zu entschuldigen und danken den Lesern für Hinweise.

ISBN 978-3-662-54424-2 ISBN 978-3-662-54425-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-54425-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Dr. Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Die „Lineare Optimierung“ ist ein fachübergreifendes Thema, das in Mathematik, Informatik und den Wirtschaftswissenschaften seinen festen Platz in der Lehre hat. Im Bachelor der Mathematik der FernUniversität in Hagen ist sie ein Pflichtmodul. Ausgangspunkt für dieses Buch war die Fragestellung, was wir jedem unserer Studierenden der Mathematik aus diesem weiten Feld mit auf den Weg geben möchten.

An den Anfang stellen wir die Modellierung. Dabei beschränken wir uns aber auf Textbuchprobleme, die man noch händisch, ohne Benutzung einer Modellierungssprache, aufstellen kann. Indem wir die entstehenden Modelle unter Rechnereinsatz lösen lassen, können wir einige potenzielle Fehler und Phänomene diskutieren.

Nach einer kurzen Wiederholung der Linearen Algebra kommen wir direkt zu einem Herzstück des Textes, Farkas' Lemma und der linearen Optimierungsdualität. Der hier vorgestellten homogenen Version von Farkas' Lemma begegnet man in Lehrbüchern erstaunlich selten. Der zugehörige Beweis ist definitiv „from the book“, gilt aber als Folklore. Er ermöglicht es, die klassische Theorie der Linearen Optimierung innerhalb von $\mathbb{Q}$ zu betreiben, was Informatikern und diskreten Mathematikern entgegen kommt.

Für uns gehören die klassischen Sätze von Minkowski und Weyl, wie auch die Polarität von polyedrischen Kegeln und Polyedern, in jede mathematische Veranstaltung zur Linearen Optimierung. Diesen Teil der Polyedertheorie diskutieren wir ausführlich und detailliert. Damit wollen wir auch die geometrische Intuition, die in der Linearen Algebra vermittelt wurde, weiter entwickeln.

Bei der Darstellung des Simplexverfahrens haben wir uns bemüht, vor allem den direkten Zusammenhang zwischen der geometrischen Vorstellung einer Ecken-Kanten-Wanderung im Polyeder und der algebraischen Sichtweise im Tableau herauszuarbeiten. Darüber hinaus präsentieren wir den Simplexalgorithmus als primales Verfahren, das terminiert, wenn das Tableau auch dual zulässig geworden ist. Damit bedürfen duale Simplexschritte keiner weiteren ausführlichen Erläuterung. Schließlich vertiefen wir das Verständnis des Zusammenspiels zwischen Geometrie und Algebra, indem wir die Upper Bound Technique diskutieren. Selbstverständlich kommen auch Bland's Rule, dessen Korrektheit wir explizit beweisen, das revidierte Verfahren und die 2-Phasentechnik zur Bestimmung einer zulässigen Lösung zu ihren Rechten.

Nach unserer Ansicht sollte kein Mathematiker darum herumkommen, die zentrale Fragestellung der Komplexitätstheorie, ob $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ist, zur Kenntnis zu nehmen. Zunächst stellen wir dafür einige benötigte Begrifflichkeiten bereit und diskutieren die Komplexität des Simplexverfahrens. Damit man eine Vorstellung davon entwickeln kann, wie „unschuldig“ ein Beispiel mit exponenzieller Laufzeit aussehen kann, rechnen wir eine Klasse von Klee-Minty-Cubes explizit durch. Die mittlere Laufzeit des Simplex-Verfahrens diskutieren wir weniger wegen der praktischen Relevanz des Resultates, die wir durchaus kritisch sehen, sondern eher wegen der geometrisch schönen Argumente im Beweis und der Anwendung der Ergebnisse der Polyeder- und der Dualitätstheorie. Einen praktischen Bezug hat hingegen die Dantzig-Wolfe Dekomposition mit der wir auch die Technik der Spaltenerzeugung anreißen können.

Als nächstes setzen wir unseren Abstecher in die Komplexitätstheorie fort. Mit der Ellipsoidmethode präsentieren wir dann das historisch erste Verfahren zur Linearen Optimierung mit polynomialer Laufzeit. Wir diskutieren, warum es sich hier wohl nicht um ein numerisch stabil implementierbares Verfahren handelt. Theoretisch ist es dagegen sehr bedeutend, da man mit seiner Hilfe die Äquivalenz von Optimieren und Separieren zeigen kann; ein Resultat von großer Tragweite in der kombinatorischen Optimierung. Als nichtlineares Verfahren hat man bei der Ellipsoidmethode aus Sicht der Informatik allerdings Probleme mit der exakten Arithmetik. Wie man diese mathematisch löst, diskutieren wir hier aber nicht mehr.

Mit dem letzten Kapitel verlassen wir nun endgültig heimisches, diskretes Terrain. Schon für das vorletzte Kapitel mussten wir den Körper $\mathbb{Q}$ verlassen und mit Näherungsverfahren argumentieren. Wir sehen uns zwei polynomiale Verfahren für die Lineare Optimierung näher an, die ursprünglich aus der Nichtlinearen Optimierung stammen. Da ist zunächst das Karmarkar-Verfahren, welches das erste praktikable, polynomiale Verfahren war. Wir diskutieren die einfache geometrische Idee und führen alle Rechnungen zum Nachweis der Komplexität explizit durch. Das zweite diskutierte Innere-Punkt-Verfahren ist ein pfadverfolgender Algorithmus. Hier stellen wir die zugehörige Theorie und die geometrischen Ideen vor.

Das Buch wurde im Laufe der Jahre meiner Lehrtätigkeit aus verschiedenen Quellen gespeist. Zum einen möchte ich für den klassischen Teil die Vorlesung meines akademischen Lehres Achim Bachem und das Skriptum seines akademischen Bruders Martin Grötschel erwähnen. Die Darstellung der komplexitätstheoretischen Aspekte des Simplexverfahrens ist an ein Lehrbuch von Alexander Schrijver angelehnt. Für den „indiskreten Teil“ in den letzten beiden Kapiteln habe ich mich an einem Preprint von Tamás Terlaky und seinem Buch mit Roos und Vial orientiert.

Bedanken möchte ich mich auch bei Studierenden der FernUniversität für zahlreiche Hinweise auf „Tippfehler und mehr“ in Vorläufern dieses Textes. Besonderen

Dank schulde ich Alexander Malkis, der mich auf (mindestens) zwei Stellen aufmerksam gemacht hat, an denen ich den Körper $\mathbb{Q}$ unbemerkt verlassen hatte, wo dies nicht nötig war. Darüber hinaus bedanke ich mich bei Stephan Dominique Andres, Immanuel Albrecht, Sylvia Sikora und Michael Wilhelmi für ihre Mitarbeit.

Hagen, im Januar 2017 Winfried Hochstättler

Inhaltsverzeichnis

Notation

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\|I\|$	Anzahl der Elemente einer endlichen Menge I
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{K}$	ein Zwischenkörper von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$
$\mathbb{K}_+ = \{x \in \mathbb{K} \mid x \geq 0\}$	Menge der nicht-negativen Zahlen aus $\mathbb{K}$
$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$	abgeschlossenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$]\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha < x \leq \beta\}$	links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$[\alpha, \beta[= \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha \leq x < \beta\}$	links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$]\alpha, \beta[= \{x \in \mathbb{K} \mid \alpha < x < \beta\}$	offenes Intervall von α bis β für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$[\alpha, \infty] = \{x \in \mathbb{K} \mid x \geq \alpha\} \cup \{\infty\}$	Menge der Zahlen $\geq \alpha$ aus $\mathbb{K}$ zuzüglich ∞ für $\alpha \in \mathbb{K}$
$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \\|x - x_0\\| < \varepsilon$	die offene ε-Umgebung um x_0
$\mathbb{K}^n = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_j \in \mathbb{K}\ 1 \leq j \leq n\}$	n-dimensionaler Spaltenraum über $\mathbb{K}$

$e^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (j)$	j-ter Einheitsvektor von $\mathbb{K}^n$ für $1 \leq j \leq n$
$\mathbb{K}^{m \times n}$	Menge der $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$
I_n	n-reihige Einheitsmatrix
$A^\top$	Transponierte einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$c^\top x$	Skalarprodukt der Vektoren $c, x \in \mathbb{K}^n$
$S^\perp = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \forall s \in S{:} s^\top x = 0\}$	orthogonales Komplement einer Menge $S \subseteq \mathbb{K}^n$
$\operatorname{rg} A$	Rang einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$\det A$	Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$\ker A = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$	Kern einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
A_{ij}	Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
$A_{S.}$	die Untermatrix von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, die aus den mit S indizierten Zeilen gebildet wird
$A_{.j}$	die j-te Spalte der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
$A_{.S}$	die Untermatrix von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, die von den mit S indizierten Spalten gebildet wird.
c_S	der Teilvektor von $c \in \mathbb{K}^n$, der von den mit S indizierten Koordinaten gebildet wird.
$\subset$	Teilmenge aber nicht gleich.
$A \dot{\cup} B$	die disjunkte Vereinigung von A und B. Es wird also mit dem Punkt über dem Vereinigungszeichen gefordert, dass $A \cap B = \emptyset$.
ln	der natürliche Logarithmus.
$A \Delta B$	die symmetrische Differenz zweier Mengen