# Mathematatik ist schön

Heinz Klaus Strick

# Mathematik ist schön

## Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren

Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-53729-9 ISBN 978-3-662-53730-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-53730-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.



Planung: Dr. Andreas Rüdinger
Abbildungen: Heinz Klaus Strick. Abb. 3.2 und die Kanonenkugeln in Kapitel 16 von Stephan Meyer
Einbandabbildung: deblik, Berlin
Einbandgestaltung: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Vorwort

Nicht jeder denkt, wenn von Mathematik die Rede ist, unbedingt an etwas, an dem man sich erfreuen kann. Dabei hat die Mathematik viele spannende und durchaus auch ästhetisch ansprechende Aspekte zu bieten. In diesem Buch versuche ich einige dieser schönen Seiten der Mathematik aufzuzeigen.

Während meiner Tätigkeit als Mathematiklehrer habe ich mich immer wieder bemüht, für eine gewisse Auflockerung des Unterrichts zu sorgen. Denn auch beim spannendsten Mathematikunterricht lassen sich mühsame und trockene Phasen leider nicht vermeiden.

Für eine solche Auflockerung und Bereicherung eignen sich Fragestellungen, die man als *mathematische Spiele* bezeichnen könnte, oder auch *Knobelaufgaben,* deren Lösungswege zu verblüffenden Einsichten führen.

So können beispielsweise nach der Behandlung der Winkelsätze in der Elementargeometrie regelmäßige Sternfiguren untersucht (Kap. 1) oder regelmäßige Vielecke mithilfe von Rauten ausgelegt werden (Kap. 10). Das Auffinden des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen ist unterhaltsamer, wenn man dies als Auslegen eines Rechtecks interpretiert (Kap. 3). Kopfrechnen ist nicht jedermanns Sache, aber erstaunlicherweise kann man mit nur wenigen Rechentricks interessante Strukturen in der Welt der Zahlen entdecken (Kap. 7). Quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme zu lösen, ist in der Regel nicht sehr spannend – es sei denn, man nutzt diese Verfahren, um wunderbare Figuren mit sich gegenseitig berührenden Kreisen *(Kissing Circles)* zu erforschen (Kap. 15) und sich mit der Frage der Parkettierung von Rechtecken durch lauter verschieden große Quadrate zu beschäftigen (Kap. 14).

Etliche der im Buch angesprochenen Themen richten sich an jüngere Schülerinnen und Schüler. Erfahrungsgemäß üben Fadenbilder (Kap. 6) eine große Faszination aus – auch wenn die theoretischen Hintergründe erst am Ende der Schulzeit oder sogar erst danach vermittelt werden können. Das Spielen mit Pentomino-Steinen (Kap. 5) regt zu strategisch-logischer Vorgehensweise an. Und dass sich hinter dem Wiegen mit einem festen, sehr eingeschränkten Satz von Gewichten (Kap. 9) das Rechnen im Dreiersystem verbirgt, können auch schon pfiffige 10-Jährige verstehen. Bereits in den ersten Schuljahren lernen Kinder Flächeninhalte einfacher geometrischer Figuren zu bestimmen; umso größer ist dann das Erstaunen, dass es auch ganz anders geht: Auf einem

Koordinatensteckbrett braucht man nur die Gitterpunkte auf dem Rand und im Innern zu zählen (Kap. 11).

Sich mit schöner Mathematik zu beschäftigen, kann aber auch bedeuten, dass man sich farbige Muster anschaut oder eigene Muster entwirft. Muster aus bunten Steinen (Kap. 2) untersuchte man schon vor 2500 Jahren. Beim Färben von Kreisringen (Kap. 4) und gleich großen Teilflächen regelmäßiger Vielecke (Flächenaufteilungen, Kap. 8) kann man die eigene Fantasie entfalten und vielleicht sogar neue Muster entdecken.

Am Ende des Buches stehen zwei umfangreichere Kapitel über die Herleitung von Potenzsummenformeln (Kap. 16) und zum Satz des Pythagoras (Kap. 17). Sie machen deutlich, wie im Laufe der Jahrhunderte immer wieder neue Ideen zu einem Thema entwickelt wurden.

Für weitere Themen war leider kein Platz mehr in diesem Buch. Mir ist bewusst, dass eine Auswahl auch anders hätte aussehen können. (Wer beispielsweise den „Goldenen Schnitt“ vermisst: Zumindest ein bisschen davon findet sich in Kap. 3 und in Kap. 13.)

Die Kapitel sind durchweg unabhängig voneinander lesbar. Für den Einstieg in die einzelnen Themen wurde ein möglichst einfacher Zugang gewählt; dafür werden keine oder nur geringe Voraussetzungen aus dem Schulunterricht benötigt.

Es ist ein wichtiges Anliegen des Buches, dass viele junge Menschen den Weg zur Mathematik finden und zugleich jene Leser, deren Schulzeit schon einige Zeit zurückliegt, sich wieder erinnern und Neues entdecken. Hierbei sollen die zahlreichen Hinweise auf weitere Informationsmöglichkeiten im Internet sowie auf weiterführende Literatur helfen. Die „Lösungen“ zu den in den einzelnen Abschnitten eingestreuten *Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen* werden auf der Internetseite des Verlags veröffentlicht:

http://www.springer.com/de/book/9783662537299.

Das Buch wurde für alle geschrieben, die Freude an der Mathematik haben oder verstehen möchten, warum das Buch diesen (für manchen vielleicht provokanten) Titel trägt. Es richtet sich auch an Lehrkräfte, die ihren Schülerinnen und Schülern zusätzliche oder neue Lernmotivation geben wollen.

Auch wenn in jedem Kapitel Sätze, Regeln und Formeln grafisch besonders hervorgehoben sind, sich also die typischen Elemente eines Mathematikbuches wiederfinden, ist dies kein Lehrbuch der Mathematik. Beweise von Sätzen erfolgen in den meisten Fällen nur beispielgebunden – die zugrunde liegenden Ideen zu vermitteln war mir stets wichtiger, als die formalen Schlüsse aufzuzeigen.

Die Fülle an Grafiken in diesem Buch soll dazu anregen, eigene Ideen zu den dargestellten Objekten zu entwickeln:

*Anschauen, Nachdenken, Ausprobieren, Variieren, Recherchieren, Wundern.*

Unter diesem Motto standen und stehen auch die von mir erstellten immerwährenden Kalender im DIN A3-Format, die ich seit einigen Jahren zugunsten von *Friedensdorf International* in Oberhausen verkaufe (www.mathematik-ist-schoen.de).

Dass die meisten Grafiken mithilfe der Programmiersprache LOGO erstellt wurden, mag auf Kritik stoßen, da die mit dieser Software erreichbare grafische Auflösung sicherlich nicht optimal ist. Ausschlaggebend für die Entscheidung waren neben der Lizenzfrage meine eigenen positiven Unterrichtserfahrungen mit dem Konzept einer Programmiersprache, die ihr Erfinder Seymour Papert *(Mindstorms)* sogar für die Grundschule geeignet hielt.

In den letzten Jahren hatte ich das Vergnügen, mich in jedem Monat neu mit einer Mathematikerin oder einem Mathematiker beschäftigen zu dürfen, um dann durch ein Kalenderblatt an diese(n) zu erinnern (www.spektrum.de: *Der Mathematische Monatskalender).* Wenn man sich mit den Erkenntnissen und Ideen längst verstorbener Gelehrter auseinandersetzt, kommt man oft aus dem Staunen nicht heraus. Ich hoffe, dass es mir in diesem Buch auch gelungen ist, eine Reihe dieser wunderbaren, leider oft in Vergessenheit geratenen Einsichten wieder ins Bewusstsein zu rücken. Hierzu gehören insbesondere auch die Entdeckungen der Mathematiker des islamischen Kulturkreises. Während meiner Übersetzungsarbeit an Len Berggrens *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (Mathematik im islamischen Mittelalter, Springer 2011) hat sich auch für mich eine bis dahin unbekannte Welt geöffnet.

Ich habe mich bemüht, durch die Literaturhinweise in jedem Kapitel und am Ende des Buches genügend Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen zu geben. Erfreulicherweise hat die Qualität der deutschen Wikipedia-Beiträge (und der darin enthaltenen Literaturhinweise) in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Manchmal werden sie von der englisch- bzw. französischsprachigen Version noch übertroffen; daher sind auch diese Quellen genannt. Im Einzelnen ist es mir nicht mehr möglich anzugeben, durch welche Veröffentlichungen ich selbst welche Anregungen erhalten habe. In den vergangenen Jahrzehnten habe ich eine große Zahl von Büchern durchgearbeitet, deren Titel mit den Vokabeln

*Recreations, Challenging Problems, Excursions, Adventures …*

beginnen. Meistens habe ich sie unter dem Gesichtspunkt durchgesehen, ob sie Anregungen für den „normalen" Unterricht, für Arbeitsgemeinschaften oder für Wettbewerbsaufgaben enthielten.

Am Ende der Arbeit an diesem Buch möchte ich mich herzlich bei all denen bedanken, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben:

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich immer wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei Wilfried Herget, der zahlreiche Vorschläge machte, Formulierungen meiner Texte verständlicher zu gestalten, und Argumentationslücken aufdeckte (die ich jetzt hoffentlich gefüllt habe),
- bei Manfred Stern, der akribisch meine Texte durchschaute und vor allem auch dank seiner Fremdsprachenkompetenz dabei half, Fehler zu vermeiden,

- bei Peter Gallin, der mich durch seine konstruktiv-kritischen Anmerkungen auf Schwachstellen aufmerksam machte,
- bei Hans Walser, durch dessen unfassbar kreative Veröffentlichungen ich immer wieder Anregungen für dieses Buch erhielt,
- und nicht zuletzt bei Andreas Rüdinger und Carola Lerch vom Springer Verlag, die dieses Buch erst ermöglichten.

Leverkusen, Deutschland

Heinz Klaus Strick

# Inhaltsverzeichnis


**1 Regelmäßige Vielecke und Sterne** . . . . . 1
1.1 Eigenschaften regelmäßiger Sterne . . . . . 1
1.2 Sterne zeichnen . . . . . 7
1.3 Diagonalen in einem regelmäßigen $n$-Eck . . . . . 9
1.4 Zackenwinkel im regelmäßigen $n$-zackigen Stern . . . . . 11
1.5 Aufgesetzte $n$-zackige Sterne . . . . . 15
1.6 Regelmäßige $n$-Ecke in der Gauß'schen Zahlenebene . . . . . 16
1.7 Spielpläne mithilfe von regelmäßigen $n$-Ecken aufstellen . . . . . 21
1.8 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 23

**2 Muster aus bunten Steinen** . . . . . 25
2.1 Die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen . . . . . 25
2.2 Die Summe der ersten $n$ ungeraden natürlichen Zahlen . . . . . 30
2.3 Quotienten von Summen ungerader natürlicher Zahlen . . . . . 33
2.4 Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen . . . . . 35
2.5 Summe der ersten $n$ Quadratzahlen von natürlichen Zahlen . . . . . 41
2.6 Summe der ersten $n$ Kubikzahlen von natürlichen Zahlen . . . . . 44
2.7 Pythagoreische Zahlentripel . . . . . 50
2.8 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 58

**3 Zerlegung von Rechtecken in möglichst große Quadrate** . . . . . 59
3.1 Ein Spiel mit einem Rechteck . . . . . 59
3.2 Rechnerische Untersuchung des Spiels – Beschreibung mithilfe von Kettenbrüchen . . . . . 62
3.3 Zusammenhang zwischen der Kettenbruchentwicklung und den Rechteckseiten . . . . . 64
3.4 Die Zerlegung besonderer Rechtecke – Fibonacci-Rechtecke . . . . . 65
3.5 Die Folge der Fibonacci-Zahlen . . . . . 67
3.6 Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus . . . . . 70
3.7 Beispiele unendlicher Folgen von Rechteckzerlegungen . . . . . 73

3.8 Bestimmung der Kettenbrüche von Quadratwurzeln . . . . . 77
3.9 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 78

**4 Kreise und Kreisringe** . . . . . 81
4.1 Die Kreiszahl $\pi$ – Umfang und Flächeninhalt eines Kreises . . . . . 81
4.2 Kreisringe . . . . . 83
4.3 Verschobene Halbkreise . . . . . 87
4.4 Flechtbänder . . . . . 90
4.5 Laufbahnen . . . . . 90
4.6 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 92

**5 Pentominos und ähnliche Puzzles** . . . . . 95
5.1 Einfache Polyominos . . . . . 95
5.2 Pentominos . . . . . 98
5.3 Hexominos . . . . . 106
5.4 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 107

**6 Fadenbilder** . . . . . 109
6.1 Grundfigur Kreis – Seiten und Diagonalen in regelmäßigen Vielecken . . . . . 109
6.2 Grundfigur Quadrat . . . . . 111
6.3 Exkurs: Einhüllende einer Funktionenschar . . . . . 115
6.4 Verfolgungskurven . . . . . 120
6.5 Grundfigur Kreis: Epizykloide . . . . . 122
6.6 Grundfigur zueinander senkrechte Achsen: Astroide . . . . . 124
6.7 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 126

**7 Rechnen mit Quadratzahlen – Zahlenzyklen** . . . . . 127
7.1 Rechnen mit Quadratzahlen . . . . . 128
7.2 Zahlenzyklen . . . . . 135
7.3 Zahlenzyklen modulo $n$ . . . . . 138
7.4 Zahlenzyklen bei höheren Potenzen . . . . . 140
7.5 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 144

**8 Flächenaufteilungen** . . . . . 145
8.1 Fortgesetzte Halbierungen . . . . . 145
8.2 Fortgesetzte Dreiteilungen . . . . . 147
8.3 Fortgesetzte Vierteilungen . . . . . 149
8.4 Fortgesetzte Fünfteilungen . . . . . 151
8.5 Fortgesetzte Teilungen in $n$ gleich große Teilflächen . . . . . 153
8.6 Geometrische Folgen und Reihen . . . . . 154
8.7 Zerlegung von regelmäßigen $n$-Ecken in gleich große Teilflächen . . . . . 156
8.8 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . . 159

**9 Wiegen im 3er-System** . . . 161
9.1 Lösung der einfachen Fälle des Wägeproblems . . . 162
9.2 Lösung der übrigen Fälle des Wägeproblems . . . 163
9.3 Darstellung natürlicher Zahlen im 3er-System . . . 165
9.4 Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen . . . 166
9.5 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . 169

**10 Parkettieren von regelmäßigen 2*n*-Ecken mithilfe von Rauten** . . . 171
10.1 Parkettierung eines regelmäßigen 10-Ecks . . . 172
10.2 Anwenden der Parkettierungsmethode auf andere regelmäßige 2*n*-Ecke . . . 173
10.3 Verallgemeinerungen der beobachteten Gesetzmäßigkeiten . . . 175
10.4 Anleitung zum Basteln der Rauten-Puzzles . . . 177
10.5 Alternative Auslegungen des regelmäßigen 10-Ecks mit Rauten . . . 178
10.6 Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen 2*n*-Ecke von innen nach außen . . . 180
10.7 Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen 2*n*-Ecke von außen nach innen . . . 182
10.8 Rauten-Parkettierungen für regelmäßige 5-Ecke, 7-Ecke, 9-Ecke usw . . . 185
10.9 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . 187

**11 Untersuchungen zum Satz von Pick** . . . 189
11.1 Eine Regel für Rechtecke . . . 190
11.2 Eine Regel für rechtwinklige Vielecke . . . 192
11.3 Überprüfung der Regel für schräg abgeschnittene Dreiecke . . . 194
11.4 Überlegungen zu einem allgemeinen Beweis des Satzes von Pick . . . 195
11.5 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . 198

**12 Augensummen** . . . 201
12.1 Augensummen beim Werfen von zwei regelmäßigen Hexaedern . . . 202
12.2 Augensummen beim Werfen von mehreren regelmäßigen Hexaedern . . . 204
12.3 Eine fehlerhafte Vorstellung über Augensummen . . . 206
12.4 Ein faires Würfelspiel mit Augensummen . . . 209
12.5 Die Sicherman-Würfel . . . 210
12.6 Weitere Ersatz-Zufallsgeräte für den Doppelwurf . . . 211
12.7 Algebraischer Hintergrund für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten . . . 214
12.8 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen beim *n*-fachen Würfeln . . . 218
12.9 Wahrscheinlichkeitsverteilungen der platonischen Körper . . . 220
12.10 Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleichen Augensummen . . . 222

12.11 Ein Beispiel zum Zentralen Grenzwertsatz . . . . 224
12.12 Bestimmen von Augensummen mithilfe von Markow-Ketten . . . . 227
12.13 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . 229

**13 Das verschwundene Quadrat** . . . . 231
13.1 Scheinbar zueinander kongruente Figuren . . . . 232
13.2 Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Höhensatz des Euklid . . . . 237
13.3 Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit anderen Methoden Euklids . . . . 242
13.4 Weitere Eigenschaften der Folge der Fibonacci-Zahlen . . . . 244
13.5 Anordnung von Sam Loyd . . . . 246
13.6 Weitere geeignete Zahlentripel . . . . 247
13.7 Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras . . . . 248
13.8 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . 249

**14 Zerlegen von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate** . . . . 251
14.1 Rechtecke, die sich in neun bzw. zehn verschieden große Quadrate zerlegen lassen . . . . 252
14.2 Bestimmen der Seitenlängen zu einer gegebenen Zerlegung . . . . 254
14.3 Einführung der Bouwkamp-Notation zur Beschreibung einer Zerlegung . . . . 258
14.4 Quadrate, die man in lauter verschieden große Quadrate zerlegen kann . . . . 261
14.5 Zusammenhang mit elektrischen Netzwerken . . . . 264
14.6 Ein Spiel mit Rechteckzerlegungen . . . . 265
14.7 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . 266

**15 Kissing Circles** . . . . 269
15.1 Untersuchung sich berührender Kreise mithilfe trigonometrischer Methoden . . . . 270
15.2 Der Vier-Kreise-Satz von Descartes . . . . 272
15.3 Bestimmung von Beispielen mit ganzzahligen Radien . . . . 276
15.4 Pappos-Ketten . . . . 280
15.5 Berührende Kreise mit Krümmung 0 . . . . 283
15.6 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . 285

**16 Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen** . . . . 287
16.1 Herleitung von Summenformeln mithilfe arithmetischer Folgen höherer Ordnung . . . . 288
16.2 Koeffizientenbestimmung durch Vergleich aufeinanderfolgender Glieder der Summenfolge . . . . 295
16.3 Alhazens Herleitung der Summenformeln für höhere Potenzen . . . . 297

16.4 Thomas Harriot entdeckt den Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Tetraederzahlen . . . 300
16.5 Fermats Entdeckung . . . 305
16.6 Pascals Methode zur Bestimmung von Formeln für Potenzsummen . . . 307
16.7 Darstellung der Potenzsummen-Formeln mithilfe der Bernoulli-Zahlen . . . 309
16.8 Bestimmung von Potenzsummen-Formeln mithilfe der Lagrange-Interpolation . . . 310
16.9 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . 312

**17 Der Satz des Pythagoras** . . . 313
17.1 Der Satz des Pythagoras und die klassischen Beweise von Euklid . . . 313
17.2 „Schöne“ Beweise des Satzes von Pythagoras . . . 319
17.3 Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras . . . 321
17.4 Darstellung der Zerlegungsbeweise mithilfe von Fliesenmustern . . . 325
17.5 Einige Beweise von historischer Bedeutung . . . 326
17.6 Unendliche Folgen im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras . . . 330
17.7 Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras . . . 332
17.8 Die Möndchen des Hippokrates von Chios und andere Kreisfiguren . . . 333
17.9 Anwendung des Satzes von Pythagoras bei Vierecken . . . 338
17.10 Ganzzahlige Pythagoras-Partner und besondere Pythagoras-Folgen . . . 339
17.11 Heron’sche Dreiecke . . . 344
17.12 Briefmarken zu Pythagoras . . . 347
17.13 Hinweise auf weiterführende Literatur . . . 349

**Allgemeine Hinweise auf geeignete Literatur** . . . 351

**Sachverzeichnis** . . . 353