
Aufgabensammlung Analysis 1

Hans-Jürgen Reinhardt

Aufgabensammlung Analysis 1

mit mehr als 500 Übungen und Lösungen

 Springer Spektrum

Hans-Jürgen Reinhardt
Siegen, Deutschland

ISBN 978-3-662-49416-5
DOI 10.1007/978-3-662-49417-2

ISBN 978-3-662-49417-2 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Annika Denkert

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung entstand während der entsprechenden Vorlesungen des Autors an der Universität Siegen in den Jahren 1993 bis 2013. Es sind Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen zu allen Themen der Analysis 1, d. h. der eindimensionalen Analysis, zusammengestellt. Die Aufgaben sind von 1 bis 217 nummeriert. Da aber die Aufgaben meist noch unterteilt sind, finden sich hier insgesamt über 500 gelöste Aufgaben. Die Schwerpunkte jeder Aufgabe sind mit optisch hervorgehobenen Stichworten angegeben. Diese Stichworte sind im Index zusammengefasst. Somit kann man zu einem Stichwort über den Index zugehörige Aufgaben finden!

Die Reihenfolge der Themen orientiert sich am Verlauf einer Vorlesung zur Analysis 1 für Studierende der Mathematik, Physik, Informatik und des gymnasialen Lehramts Mathematik im ersten Semester. Wenn Hilfsergebnisse für die Aufgaben verwendet werden, ist dies mit entsprechenden Literaturhinweisen angegeben. Zu zahlreichen Aufgaben sind vorab Lösungshinweise gegeben. Je nach Kenntnisstand der Hörer/Innen können diese weggelassen oder ergänzt werden.

Wer interessiert sich für diese Aufgabensammlung? Zum einen könnten es Kollegen sein, die als Dozenten ausgearbeitete Beispiele für ihre Vorlesungen suchen und diese vorstellen wollen. Natürlich eignen sich die ausgearbeiteten Übungsaufgaben auch für Übungen und Tutorien und – die einfachen Aufgaben – auch für Klausuren. Für Studierende ist die hier vorgelegte Aufgabensammlung eine Quelle für Eigenstudium, für häusliche Nacharbeitung des Vorlesungsstoffes und insbesondere für Klausurvorbereitungen.

Parallel zu dieser Aufgabensammlung werden noch zwei Aufgabensammlungen von jeweils vergleichbarem Umfang erstellt. Zum einen betrifft dies die mehrdimensionalen Analysis, Funktionalanalysis einschließlich inverser Probleme und die Theorie von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Zum anderen ist es eine Sammlung mit Aufgaben zur Numerik. In Letzterer sind auch Aufgaben enthalten, die in diese Analysis-Sammlung passen würden – und umgekehrt.

Sicherlich finden sich Aufgaben aus der vorliegenden Sammlung auch in Lehrbüchern oder anderen Aufgabensammlungen. Die Standard-Lehrbücher zur Analysis und Beispiele anderer Aufgabensammlungen sind im Literaturverzeichnis aufgeführt. In einigen Büchern gibt es Lösungshinweise zu Aufgaben. Die Aufgaben dieser Sammlung sind im Laufe des genannten Zeitraums von 20 Jahren gestellt worden, und vor allem gibt es zu

allen Aufgaben ausführliche Lösungsvorschläge – bei einigen Aufgaben auch alternative Lösungen.

Bei der Auswahl, Zusammenstellung, Ausarbeitung und dem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ en der Übungsaufgaben sowie der Erstellung der Grafiken haben in den genannten Jahren meine Mitarbeiter Frank Seiffarth, Mathias Charton, Reinhard Ansorge, Thorsten Raasch, Ivan Cherlenyak, Stefan Schuss und Timo Dornhöfer mitgewirkt, denen ich dafür besonders dankbar bin. Mein Dank gilt auch – und vor allem – meinen beiden Sekretärinnen, Margot Beier und Kornelia Mielke. Sie haben sich um das $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ en der Aufgaben von einer ersten Aufgabensammlung im Jahre 1994 bis zu dieser Zusammenstellung verdient gemacht.

Diese Aufgabensammlung ist mehrfach sorgfältig durchgesehen worden. Vermutlich gibt es aber kein Skript oder Buch, das völlig fehlerfrei ist. Dies gilt sicher auch für diese Aufgabensammlung. Falls Sie Fehler finden, lassen Sie es mich bitte wissen (reinhardt@mathematik.uni-siegen.de).

Siegen, 2016

Hans-Jürgen Reinhardt

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----|
| 1 | Grundlagen, Zahlen, Folgen, Reihen | 1 |
| 1.1 | Aussagenlogik, Mengen, Abbildungen | 1 |
| 1.2 | Sigma-Algebra, Dynkin-System, Körper, Gruppen | 11 |
| 1.3 | Vollständige Induktion, indirekter Beweis, Primzahlen | 21 |
| 1.4 | Wurzeln, Gauß-Klammern, symmetrische Differenz | 38 |
| 1.5 | Ungleichungen, Potenzen und Fakultäten | 47 |
| 1.6 | Maximum und Minimum, Supremum und Infimum | 59 |
| 1.7 | Wahrscheinlichkeiten, komplexe Zahlen | 70 |
| 1.8 | Zahlenfolgen | 78 |
| 1.9 | Zahlenreihen | 115 |
| 2 | Funktionen in 1-d | 139 |
| 2.1 | Stetigkeit | 139 |
| 2.2 | Exponentialfunktion und Logarithmus | 162 |
| 2.3 | Differenzierbarkeit | 171 |
| 2.4 | Grenzwerte von Funktionen, Regel von de l'Hospital | 187 |
| 2.5 | Taylorformel | 202 |
| 2.6 | Eigenschaften trigonometrischer Funktionen | 211 |
| 2.7 | Das (Riemann-)Integral | 225 |
| 2.8 | Uneigentliche Integrale | 251 |
| 2.9 | Funktionenfolgen und -reihen, Potenzreihen, Konvergenzradien | 260 |
| | Liste von Symbolen und Abkürzungen | 283 |
| | Literatur | 285 |
| | Sachverzeichnis | 287 |