
Springer-Lehrbuch

Michel Chipot

Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaften

 Springer Spektrum

Michel Chipot
Institut für Mathematik
Universität Zürich
Zürich, Schweiz

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-662-47087-9

ISBN 978-3-662-47088-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-47088-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Clemens Heine

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

(www.springer.com)

Geleitwort

Mathematik ist für viele naturwissenschaftliche Disziplinen ein sehr nützliches Werkzeug. Es ist jedoch schwierig, ein Werkzeug zu verwenden, ohne zu wissen wie es funktioniert. In vielen Büchern, die sich an ein großes Publikum richten, werden häufig Beweise ausgelassen. Meiner Meinung nach ist ein guter Beweis immer sehr einfach und kann von vielen Studierenden verstanden werden. Deshalb folge ich hier diesem Prinzip in den meisten Fällen. Eine andere Tendenz im mathematischen Unterricht – welche in einem gewissen Sinne auf dem Glauben beruht, dass die Studierenden schwach in Mathematik oder nicht erwachsen genug seien – ist, das fundamentale Konzept in einer Liste trivialer Beispiele zu ertränken. Im tatsächlichen Leben würde das dazu führen, dass die Studierenden mit einem Stein einen Nagel einschlagen oder mit einem Messer eine Schraube anziehen, weil ihnen niemand beigebracht hat, dass es bereits Hammer und Akkuschraubenzieher gibt. Um dieses Ziel der bestmöglichen Vollständigkeit zu erreichen, berücksichtige ich, dass der Leser nur knapp mit dem Stoff aus dem Gymnasium vertraut ist. Deshalb beginne ich mit relativ kurzen Kapiteln und ergänze diese mit erläuternden Beispielen. Die Lösungen der Übungen sind ausführlich und detailliert. Die Idee dahinter ist einerseits, den Leser nicht zu entmutigen, und andererseits, ihn zu überzeugen, dass genügend Übung unerlässlich ist, um sich Wissen anzueignen und Inhalte zu verstehen. Es gibt noch einen weiteren Gedanken: Mathematik ist sowohl ein Werkzeug als auch eine spezielle Art des Denkens, welche akribisch ist und nicht belegte Behauptungen vermeidet. Dies ist eine fundamentale Haltung in jeder wissenschaftlichen Disziplin und ein weiteres Ziel, welches wir verfolgen. Nach dieser ausführlichen Einführung am Anfang des Buches werden in späteren Kapiteln mehr Anstrengungen vom Leser verlangt: Neue Stoffe werden viel kompakter in ein Kapitel eingebaut, und die Lösungen der Übungen sind vergleichsweise knapp. Wir hoffen, dass unser Leser inzwischen ein selbstständiger Studierender geworden ist. Da sich dieses Buch nicht an eine spezifische Zielgruppe – wie Physiker, Chemiker, Finanzwissenschaftler oder ähnliche – richtet, hoffe ich, dass jeder davon profitieren kann.

Ich möchte an dieser Stelle allen meinen Assistierenden danken, die mich beständig unterstützt haben. Mein ganz besonderer Dank geht an Christian Stinner, der zahlreiche

Übungen und Ideen für dieses Buch beigetragen hat. Wei Xue und Julian Fischer danke ich für das Korrekturlesen. Ein herzliches Dankeschön geht an Gerda Schacher, die das Buch in LaTeX erfasst hat. Ebenfalls möchte ich mich bei Agnes Herrmann und Clemens Heine von Springer für die gute Zusammenarbeit bedanken.

Zürich, im April 2015

M. Chipot

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | Elementare Begriffe | 1 |
| 1.1 | Mengen | 1 |
| 1.2 | Mengenoperationen | 3 |
| 1.3 | Die Menge der reellen Zahlen | 5 |
| 1.4 | Funktionen | 10 |
| 1.5 | Übungen | 16 |
| 2 | Grenzwerte | 19 |
| 2.1 | Grenzwerte von Folgen | 19 |
| 2.2 | Grenzwerte von Funktionen | 21 |
| 2.3 | Übungen | 25 |
| 3 | Differenzierbare Funktionen | 27 |
| 3.1 | Ableitung | 27 |
| 3.2 | Kritische Punkte | 30 |
| 3.3 | Mittelwertsatz | 32 |
| 3.4 | Weitere Ableitungen | 33 |
| 3.5 | Monotone Funktionen | 35 |
| 3.6 | Konvexität | 37 |
| 3.7 | Extremwertaufgaben | 40 |
| 3.8 | Newton-Verfahren | 41 |
| 3.9 | Taylor'sche Formel | 44 |
| 3.10 | Übungen | 46 |
| 4 | Integralrechnung | 49 |
| 4.1 | Umkehrung der Differentiation | 49 |
| 4.2 | Flächenproblem | 50 |
| 4.3 | Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung | 53 |
| 4.4 | Elementare Integrationsmethoden | 55 |
| 4.5 | Numerische Integration | 59 |
| 4.6 | Anwendungen | 61 |
| 4.7 | Übungen | 65 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| 5 | Reihen | 69 |
| | 5.1 Konvergenz | 69 |
| | 5.2 Konvergenztest | 71 |
| | 5.3 Rechenregeln für Reihen | 77 |
| | 5.4 Potenzreihen | 78 |
| | 5.5 Übungen | 83 |
| 6 | Komplexe Zahlen | 85 |
| | 6.1 Einführung | 85 |
| | 6.2 Algebraische Operationen | 86 |
| | 6.3 Übungen | 95 |
| 7 | Fourier-Reihen | 97 |
| | 7.1 Periodische Funktionen | 97 |
| | 7.2 Trigonometrische Polynome | 99 |
| | 7.3 Übungen | 109 |
| 8 | Gewöhnliche Differenzialgleichungen | 113 |
| | 8.1 Einführung | 113 |
| | 8.2 Elementare Theorie | 117 |
| | 8.3 Verschiedene lösbare Differenzialgleichungen | 118 |
| | 8.4 Newton-Methode | 121 |
| | 8.5 Übungen | 122 |
| 9 | Vektorräume | 125 |
| | 9.1 Raum \mathbb{R}^n | 125 |
| | 9.2 \mathbb{R} -Vektorräume | 126 |
| | 9.3 Unterräume | 129 |
| | 9.4 Linearkombinationen | 132 |
| | 9.5 \mathbb{C} -Vektorräume | 133 |
| | 9.6 Übungen | 134 |
| 10 | Basis und Dimension | 137 |
| | 10.1 Lineare Unabhängigkeit | 137 |
| | 10.2 Basen | 139 |
| | 10.3 Dimension | 142 |
| | 10.4 Direkte Summen | 146 |
| | 10.5 Übungen | 149 |
| 11 | Lineare Abbildungen | 151 |
| | 11.1 Einführung | 151 |
| | 11.2 Kern und Bild | 153 |
| | 11.3 Übungen | 162 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| 12 | Matrizen | 165 |
| | 12.1 Einführung | 165 |
| | 12.2 Die Matrix einer linearen Abbildung | 168 |
| | 12.3 Rang einer Matrix | 172 |
| | 12.4 Invertierbare Matrizen und Basiswechsel | 175 |
| | 12.5 Übungen | 178 |
| 13 | Determinanten | 181 |
| | 13.1 Die Determinantenfunktion | 181 |
| | 13.2 Eindeutigkeit der Determinantenfunktion | 183 |
| | 13.3 Entwicklung einer Determinante | 189 |
| | 13.4 Berechnungsverfahren für Determinanten | 192 |
| | 13.5 Die Inverse einer Matrix | 193 |
| | 13.6 Übungen | 195 |
| 14 | Lineare Systeme | 197 |
| | 14.1 Einführung | 197 |
| | 14.2 Der Fall $m = n = 2$ | 198 |
| | 14.3 Gauß-Verfahren | 199 |
| | 14.4 Cramer'sche Formel | 201 |
| | 14.5 Übungen | 202 |
| 15 | Euklidische Räume und Metrik | 205 |
| | 15.1 Skalarprodukt | 205 |
| | 15.2 Euklidische Metrik | 207 |
| | 15.3 Orthogonalität | 210 |
| | 15.4 Vektor- oder Kreuzprodukt | 211 |
| | 15.5 Übungen | 214 |
| 16 | Diagonalisierung | 217 |
| | 16.1 Eigenvektoren und Eigenwerte | 218 |
| | 16.2 Charakteristisches Polynom | 222 |
| | 16.3 Symmetrischer Fall | 223 |
| | 16.4 Lineare Differenzialgleichungssysteme | 225 |
| | 16.5 Übungen | 228 |
| | Anhang A.1 Trigonometrische Funktionen | 229 |
| | Anhang A.2 Lösungen der Übungen | 233 |
| | Sachverzeichnis | 333 |