# Einführung in die Moderne Matrix-Algebra

Karsten Schmidt • Götz Trenkler

# Einführung in die Moderne Matrix-Algebra

## Mit Anwendungen in der Statistik

3., überarbeitete Auflage mit 11 Abbildungen

Springer Gabler

Karsten Schmidt
Fachhochschule Schmalkalden
Schmalkalden, Deutschland

Götz Trenkler
Technische Universität Dortmund
Dortmund, Deutschland

ISBN 978-3-662-46772-5 ISBN 978-3-662-46773-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-46773-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Gabler


Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

# VORWORT

Dieses Lehrbuch ist aus Veranstaltungen entstanden, die wir mehrfach an den Universitäten Hannover und Dortmund sowie an der Fachhochschule Schmalkalden gehalten haben. Sie richteten sich hauptsächlich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften und Statistik. Dieses Buch hat daher als Zielgruppe zunächst Studierende der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Aber auch für Praktiker und Studierende aus den Bereichen Statistik, Ökonometrie, Mathematik und Informatik, die an Matrix-Algebra interessiert sind, ist das Buch gut geeignet.

In der Stoffauswahl haben wir uns von zwei Zielen leiten lassen:

- Leser dieses Buchs sollen schnell und unmittelbar an den Umgang mit Matrizen herangeführt werden. Aus diesem Grund verzichten wir bewusst auf die Darstellung der abstrakten Theorie der linearen Algebra.
- Der vermittelte Stoff soll aktuell und modern sein. Deshalb bedienen wir uns der in letzter Zeit immer populärer gewordenen Hilfsmittel wie verallgemeinerte Inversen und Moore-Penrose-Inverse von Matrizen und ihrer Anwendung zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

Wir haben die Erfahrung gemacht, dass zu viele Anwendungsbeispiele die Konzentration auf das Erlernen des notwendigen Handwerkszeugs bei der Mehrzahl der Studierenden eher behindert. Daher gibt es für den Mathematik-Teil des Buchs (Kapitel 1 – 8, 11) nur ein umfangreiches Anwendungsbeispiel (im Kapitel 0), auf das wiederholt Bezug genommen wird.

Eine Vielzahl von Anwendungsbeispielen für Matrizen und Vektoren gibt es demgegenüber im Statistik-Teil (Kapitel 9, 10, 12, 13). Die im Mathematik-Teil erlernten Zusammenhänge werden dort vor allem zur einfachen und übersichtlichen Darstellung des linearen Regressionsmodells eingesetzt.

Andererseits gibt es sehr viele Rechenaufgaben, sowohl in Form von komplett durchgerechneten Beispielen, als auch in Form von Übungsaufgaben (Kapitel 1 – 9, 11), für die am Ende des Buchs (Kapitel 14) Lösungen angegeben werden.

Beweise für die Regeln, die das Gerüst des Buchs bilden, werden nur gelegentlich gegeben, z.B. wenn sie besonders einfach sind. Damit hoffen wir, die Lesbarkeit des Buchs noch zu erhöhen. Gleichwohl wird dem Leser empfohlen, den einen oder anderen Beweis selbst zu versuchen.

Gegenüber der zweiten Auflage, die schon seit Längerem vergriffen und inzwischen über *print-on-demand* verfügbar ist, gibt es eine Vielzahl kleinerer Änderungen und Ergänzungen. Den grundsätzlichen Aufbau des Lehrbuchs, der sich bewährt hat, haben wir unverändert gelassen.

Schmalkalden und Dortmund,
Februar 2015
Karsten Schmidt
Götz Trenkler

# INHALTSVERZEICHNIS


**0 Einführung ........ 1**

0.1 Begriffe und Schreibweisen ........ 1
0.2 Beispiel: Teilebedarfsermittlung in einem Montagebetrieb ........ 2

**1 Matrix-Operationen ........ 9**

1.1 Transponierung ........ 9
1.2 Addition ........ 11
1.3 Skalar-Multiplikation ........ 12
1.4 Multiplikation ........ 13
1.5 Übersicht ........ 19
1.6 Partitionierte Matrizen ........ 19
1.7 Übungsaufgaben ........ 23

**2 Spezielle Matrizen ........ 27**

2.1 Nullmatrizen und Einsmatrizen ........ 27
2.2 Quadratische Matrizen ........ 30
2.3 Einheitsmatrizen, Einheitsvektoren und Basismatrizen ........ 31
2.4 Diagonalmatrizen und Dreiecksmatrizen ........ 35
2.5 Symmetrische Matrizen ........ 36
2.6 Idempotente und zentrierende Matrizen ........ 38
2.7 Elementarmatrizen ........ 41
2.8 Matrix-Inverse ........ 43
2.9 Orthogonale Matrizen ........ 51
2.10 Übungsaufgaben ........ 53

**3 Maßzahlen von Matrizen ........ 59**

3.1 Spur ........ 59
3.2 Rang ........ 62
3.3 Determinante ........ 70
3.4 Übungsaufgaben ........ 78

**4 Eigenwerte und Quadratische Formen ... 85**

4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren ... 85
4.2 Quadratische Formen ... 96
4.3 Übungsaufgaben ... 103

**5 Verallgemeinerte Inversen ... 107**

5.1 Definition und Regeln ... 107
5.2 Berechnung von g-Inversen ... 113
5.3 Übungsaufgaben ... 121

**6 Moore-Penrose-Inverse ... 125**

6.1 Definition und Regeln ... 125
6.2 Berechnung der Moore-Penrose-Inversen ... 131
6.3 Übungsaufgaben ... 140

**7 Lösung linearer Gleichungssysteme ... 147**

7.1 Lösbarkeit ... 147
7.2 Allgemeine Lösung ... 154
7.3 Übungsaufgaben ... 157

**8 Kronecker-Produkt und vec-Operator ... 161**

8.1 Kronecker-Produkt ... 161
8.2 vec-Operator ... 164
8.3 Übungsaufgaben ... 166

**9 Stochastische Matrizen und Vektoren ... 169**

9.1 Erwartungswert ... 170
9.2 Kovarianz- und Dispersionsmatrizen ... 172
9.3 Erwartungswert quadratischer Formen ... 176
9.4 Übungsaufgaben ... 178

**10 Lineare Regression ... 181**

10.1 Beispiel: Wieviel Heizöl passt in den Tank? ... 181
10.2 2-Variablen-Regressionsmodell ... 184

**11 Vektor- und Matrixdifferentiation ........................................ 197**

11.1 Vektordifferentiation ........................................ 198
11.2 Matrixdifferentiation ........................................ 200
11.3 Hesse-Matrix ........................................ 202
11.4 Übungsaufgaben ........................................ 207

**12 Multiples Regressionsmodell ........................................ 211**

12.1 K-Variablen-Regressionsmodell ........................................ 211
12.2 Schätzung des Parametervektors ........................................ 214
12.3 Schätzung der Störgrößenvarianz ........................................ 219
12.4 Prognosen ........................................ 222
12.5 Bestimmtheitsmaß ........................................ 224

**13 Eigenschaften der Schätzungen ........................................ 227**

13.1 Erwartungswert und Dispersionsmatrix ........................................ 227
13.2 Effizienz ........................................ 229
13.3 Mittlerer quadratischer Fehler ........................................ 232

**14 Lösungen der Übungsaufgaben ........................................ 237**

**Symbolverzeichnis ........................................ 271**

**Sachverzeichnis ........................................ 273**

# 0 EINFÜHRUNG

## 0.1 BEGRIFFE UND SCHREIBWEISEN

Unter einer Matrix versteht man eine rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ Elementen $a_{ij}$ in $m$ Zeilen und $n$ Spalten, also

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)$$

Wir bezeichnen Matrizen durch fettgedruckte Großbuchstaben, z.B. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{X}$. Die Dimension einer Matrix, also die Anzahl ihrer Zeilen $m$ und Spalten $n$, wird zur Verdeutlichung häufig in der Form $m \times n$ unter das Symbol der Matrix gesetzt. Elemente von Matrizen werden durch den korrespondierenden nicht fettgedruckten Kleinbuchstaben mit Doppelindex bezeichnet, wobei der Zeilenindex vor dem Spaltenindex steht; $b_{21}$ z.B. ist dasjenige Element der Matrix $\boldsymbol{B}$, das in der zweiten Zeile und ersten Spalte von $\boldsymbol{B}$ steht.

Die Elemente $a_{ij}\ \left(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n\right)$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$ sind prinzipiell beliebig; wir beschränken uns aber auf die Betrachtung derjenigen Matrizen, deren Elemente reelle Zahlen sind ($a_{ij} \in \mathbb{R}$). Daher verwenden wir teilweise auch die Schreibweise $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen bezeichnet.

Vektoren sind nichts anderes als Matrizen, die nur eine Spalte haben, also beispielsweise

$$\underset{m\times 1}{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \left(a_i\right)$$

mit $m$ Elementen.

Wir bezeichnen Vektoren durch fettgedruckte Kleinbuchstaben, z.B. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}$. Die Dimension eines Vektors, also die Anzahl seiner Elemente $m$, wird zur Verdeutlichung häufig in der Form $m \times 1$ unter das Symbol des Vektors gesetzt. Elemente von Vektoren werden durch den nicht fettgedruckten Kleinbuchstaben mit (Einzel-) Index bezeichnet; $b_2$ z.B. ist dasjenige Element des Vektors $\boldsymbol{b}$, das in der zweiten Zeile von $\boldsymbol{b}$ steht.

Ähnlich den Matrizen verwenden wir manchmal die Schreibweise $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$, wobei $\mathbb{R}^m$ die Menge aller reellen $m$-elementigen Vektoren bezeichnet.

Skalare sind eindimensionale Größen. Man kann sie als Matrizen auffassen, die nur eine Zeile und eine Spalte haben.

Wir bezeichnen Skalare durch nicht fettgedruckte Buchstaben, z.B. $a$, $b$, $Z$, $\lambda$, $a_{11}$, $m$.

Teilweise werden auch noch sogenannte Zeilenvektoren (also Matrizen, die nur eine Zeile haben) definiert. Wegen der im ersten Abschnitt des folgenden Kapitels beschriebenen Transponierung kommt man aber auch ohne sie aus.

## 0.2 BEISPIEL: TEILEBEDARFSERMITTLUNG IN EINEM MONTAGEBETRIEB

Im Vorwort wurde bereits darauf hingewiesen, dass der zu vermittelnde Stoff im Mathematik-Teil dieses Buchs zwar in zahlreichen Rechenaufgaben anschaulich gemacht wird sowie anhand von Übungsaufgaben gefestigt werden kann, dass hier aber keine Anwendungsbeispiele behandelt werden. Dies wird dann quasi nebenbei im Statistik-Teil des Buchs nachgeholt, wo die Matrix-Algebra bei der Entwicklung und Darstellung statistischer Verfahren angewendet wird.

Dennoch soll an dieser Stelle ein Beispiel aus der Betriebswirtschaftslehre betrachtet werden, und zwar das Problem der Teilebedarfsermittlung bei mehrstufigen Produktionsprozessen. Typisch dafür sind Montagebetriebe, beispielsweise ein Unternehmen, das aus zugekauften Vorprodukten verschiedene Messgeräte herstellt. Die Montage eines Messgeräts ist dann ein mehrstufiger Produktionsprozess.

Im Rahmen dieses Beispiels werden verschiedene Matrix-Operationen sowie einige spezielle Matrizen benutzt. Sicherlich werden viele Leser nicht über ausreichende Vorkenntnisse in Matrix-Algebra verfügen, um alles zu verstehen. Dennoch sollte jeder versuchen, dieses Beispiel so gut wie möglich nachzuvollziehen. In den folgenden Kapiteln wird dann an den passenden Stellen auf dieses Beispiel Bezug genommen, so dass eventuelle Verständnisprobleme nach und nach gelöst werden.

Wir betrachten folgenden sehr stark vereinfachten Produktionsprozess: Ein Endprodukt (Messgerät ⑤) wird aus insgesamt 2 Vorprodukten (den Einzelteilen ① und ②) sowie 2 Zwischenprodukten (den Baugruppen ③ und ④) montiert. Jede Baugruppe ③ besteht aus 2 Stücken (St.) des Einzelteils ① sowie 1 St. des Einzelteils ②, jede Baugruppe ④ besteht aus 2 St. des Einzelteils ② sowie 2 St. der Baugruppe ③. Jedes Messgerät (Endprodukt ⑤) besteht schließlich aus 4 St. des Einzelteils ①, 2 St. der Baugruppe ③, 1 St. der Baugruppe ④ sowie 2 St. des Einzelteils ②.

Diese Mengenbeziehungen lassen sich in einem sogenannten Gozinto-Graphen verdeutlichen, in dem ein Knoten ein Teil (Einzelteil, Baugruppe, Endprodukt) darstellt und eine (orientierte) Kante die Anzahl angibt, die von einem Teil in ein nachgelagertes Teil eingeht:

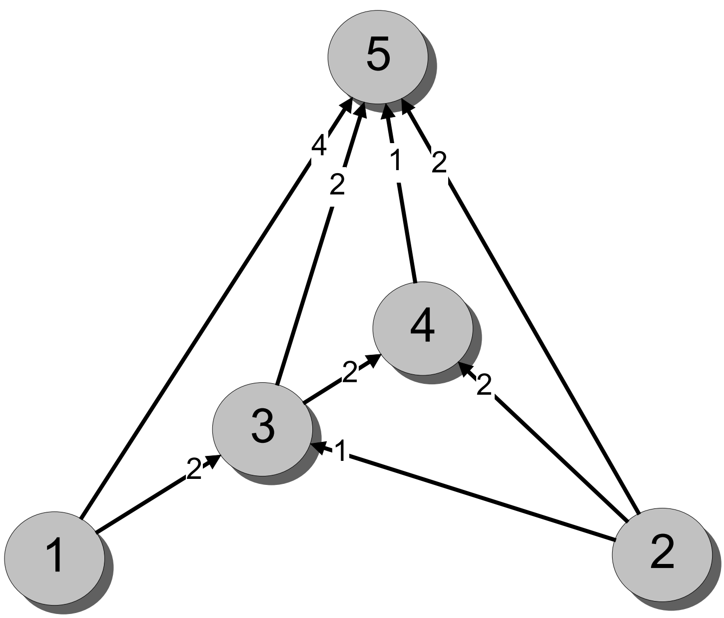


**Abb. 0.1.** Gozinto-Graph

Das Produktionsprogramm für diesen Monat sieht vor, dass 250 St. des Messgeräts ⑤ montiert werden sollen. Gesucht ist der Gesamtbedarf an Einzelteilen und Baugruppen zur Herstellung von 250 Endprodukten.

Diese Situation lässt sich mit Hilfe der Matrix-Algebra sehr übersichtlich darstellen. Zunächst legen wir dafür eine Tabelle mit den Produktionsbeziehungen an. Jeder Tabelleneintrag gibt an, wieviel Stücke des Produkts aus der Kopfspalte (links) in das Produkt aus der Kopfzeile (oben) eingehen.

| | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 |
| ② | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| ③ | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| ④ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| ⑤ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Beispielsweise besagt die Zahl 2 in der 3. Zeile und 4. Spalte, dass 2 St. des Produkts ③ für die Herstellung eines Stücks des Produkts ④ benötigt werden.

Zeilenweise kann man ablesen, wieviel Stücke des Produkts aus der Kopfspalte nötig sind, um jeweils 1 St. der übrigen Produkte zu montieren. Aus der 3. Zeile kann man z.B. ablesen, dass das (Zwischen-) Produkt ③ mit jeweils 2 St. in das (Zwischen-) Produkt ④ und das (End-) Produkt ⑤ eingeht.

Spaltenweise kann man ablesen, wieviel Stücke der übrigen Produkte notwendig sind, um 1 St. des Produkts aus der Kopfzeile zu montieren. Aus der 4. Spalte kann man z.B. ablesen, dass das (Zwischen-) Produkt ④ aus jeweils 2 St. des (Vor-) Produkts ② und des (Zwischen-) Produkts ③ hergestellt wird.

Der Eintrag 0 in der Tabelle steht für all die Fälle, in denen es keine *direkte* Mengenbeziehung zwischen den jeweiligen Produkten gibt. Einzelteil ① wird z.B. nicht direkt für die Montage der Baugruppe ④ benötigt (wohl aber indirekt über Baugruppe ③).

Diese Tabelle schreiben wir nun als Matrix

$$\underset{5\times 5}{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

***D*** wird als Direktbedarfsmatrix bezeichnet, da jedes Element $d_{ij}\ (i=1,...,5;\ j=1,...,5)$ angibt, wieviel Stücke des $i$-ten Produkts direkt zur Herstellung eines Stücks des $j$-ten Produkts erforderlich sind.

Außerdem definieren wir noch 2 Vektoren, nämlich

$$\underset{5\times 1}{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underset{5\times 1}{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Der Vektor ***x*** ist der Gesamtbedarfsvektor; $x_i\,(i=1,\dots,5)$ gibt den (noch zu berechnenden) Gesamtbedarf für das $i$-te (Vor-, Zwischen-, End-) Produkt an. Der Vektor ***b*** ist der Primärbedarfsvektor; $b_i\,(i=1,\dots,5)$ gibt die im Produktionsprogramm vorgesehene Produktionsmenge für das $i$-te (Vor-, Zwischen-, End-) Produkt an. In unserem Fall ist nur die Mengenangabe für das Messgerät ⑤ größer als 0.

Als Nächstes bilden wir die Technologische Matrix (wie man zwei Matrizen voneinander subtrahiert, wird in der ersten Anmerkung im Abschnitt 1.3 erklärt; die spezielle Matrix ***I***, die sogenannte Einheitsmatrix, wird im Abschnitt 2.3 behandelt):

$$\underset{5\times 5}{\boldsymbol{T}} = \underset{5\times 5}{\boldsymbol{I}} - \underset{5\times 5}{\boldsymbol{D}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Matrix ***T*** und den beiden Vektoren ***x*** und ***b*** ist man in der Lage, das vorliegende Problem sehr kompakt in der Form $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{b}$ hinzuschreiben:

$$\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Dass das tatsächlich so ist, sieht man, wenn man dieses lineare Gleichungssystem ausmultipliziert (wie man Matrizen und Vektoren miteinander multipliziert, wird in Abschnitt 1.4 gezeigt):

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 - 4x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 &= 250 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man nun sukzessive von unten nach oben nach den unbekannten Stückzahlen (Gesamtbedarf) $x_i (i = 1, \ldots, 5)$ auflösen. Dass $x_5 = 250$ ist, wussten wir schon. Aus der vorletzten Gleichung folgt, dass $x_4 = x_5$ ist und folglich genau 250 St. der Baugruppe ④ produziert werden müssen, und aus der drittletzten, dass $x_3 = 4x_5$ ist (unter Ausnutzung der eben gefundenen Beziehung $x_4 = x_5$) und daher genau 1000 St. der Baugruppe ③ hergestellt werden müssen. Auf diese Weise könnte man auch den Bedarf an den Einzelteilen ① und ② berechnen.

Wir wollen dieses Problem aber mit Hilfe der Matrix-Algebra lösen. Wir bestimmen zu diesem Zweck die Gesamtbedarfsmatrix $\boldsymbol{G}$. Sie ist gerade die Inverse $\boldsymbol{T}^{-1}$ der Matrix $\boldsymbol{T}$ (die Inverse einer Matrix wird in Abschnitt 2.8 behandelt).

Wir können uns das folgendermaßen veranschaulichen: Von der Matrixgleichung $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{b}$ sind die Matrix $\boldsymbol{T}$ und der Vektor $\boldsymbol{b}$ bekannt. Wären alle Größen Skalare, so würde die Gleichung $Tx = b$ lauten und wir könnten sie nach $x$ auflösen, indem wir die Gleichung, sofern $T \neq 0$ ist, durch $T$ teilen oder mit dem Kehrwert von $T$ multiplizieren:

$$Tx = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{b}{T} = \tfrac{1}{T} b = T^{-1} b$$

Wir gehen bei unserer Matrixgleichung analog vor. Man kann zwar nicht durch eine Matrix dividieren, aber für bestimmte Matrizen, beispielsweise unsere Matrix $\boldsymbol{T}$, ist es möglich, eine Art Kehrwert zu bestimmen, der als Inverse bezeichnet wird. Damit ist es möglich, nach $\boldsymbol{x}$ aufzulösen:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}$$

In unserem Beispiel erhalten wir

$$\underset{5\times 5}{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{T}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jede Spalte der Gesamtbedarfsmatrix gibt die Stückzahlen der vorgelagerten Produkte an, die für die Herstellung eines Zwischen- oder Endprodukts notwendig sind. Aus der 4. Spalte kann man z.B. ablesen, dass zur Herstellung einer Baugruppe ④ *insgesamt* 4 St. des Einzelteils ①, 4 St. des Einzelteils ② und 2 St. der Baugruppe ③ erforderlich sind (man sollte sich dies am Gozinto-Graphen klar machen, siehe Abb. 0.1).

Der Gesamtbedarfsvektor $\boldsymbol{x}$ kann dann folgendermaßen berechnet werden:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Die Produktion von 250 Messgeräten erfordert also die Herstellung von 250 St. der Baugruppe ④ und 1000 St. der Baugruppe ③, sowie den Kauf von 2000 St. des Einzelteils ② und 3000 St. des Einzelteils ①. Dass $x_5$ = 250 ist, wussten wir ja schon.

Ein großer Vorteil der matriziellen Lösung ist nun, dass wir sehr schnell die Teilebedarfsermittlung für weitere Primärbedarfsvektoren durchführen können. Nehmen wir an, dass das Produktionsprogramm für diesen Monat geändert wird und jetzt vorsieht, dass neben den 250 Messgeräten ⑤ auch noch 50 Baugruppen ④ für den Ersatzteilverkauf montiert werden sollen. Um den neuen Gesamtbedarf zu bestimmen, müssen wir lediglich eine (matrizielle) Multiplikation mit dem neuen Primärbedarfsvektor $\boldsymbol{b}$ durchführen:

$$x = Gb = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 2200 \\ 1100 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Oder wir betrachten das Produktionsprogramm für den folgenden Monat: Von einem anderen Anbieter könnten 1000 St. der Baugruppe ③ zu einem sehr günstigen Preis bezogen werden, daher sollen 600 Messgeräte ⑤ montiert werden (davon 300 für die Lagerhaltung), außerdem werden 100 St. des Einzelteils ① und 25 St. der Baugruppe ④ für den Ersatzteilverkauf benötigt:

$$x = Gb = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -1000 \\ 25 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5400 \\ 3900 \\ 1450 \\ 625 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Abschließend wollen wir die Vorteile der Teilebedarfsermittlung mit Hilfe von Matrizen zusammenfassen:

- Kompakte, übersichtliche Schreibweise.
- Für jeden Produktionsprozess ist es nur einmal notwendig, die Technologische Matrix zu bestimmen und zu invertieren. Danach erfolgt die Teilebedarfsermittlung bei alternativen Produktionsprogrammen durch Multiplikation mit verschiedenen Primärbedarfsvektoren.
- Je größer die Dimension des Problems (je höher die Zahl der Vor- und Zwischenprodukte und je höher die Zahl der Stufen), desto aufwendiger wird (ohne Matrix-Algebra) die für jeden Primärbedarfsvektor notwendige sukzessive Lösung des Gleichungssystems.
- Die Bestimmung der Gesamtbedarfe durch sukzessive Lösung des Gleichungssystems wird dann schwieriger, wenn Schleifen im Gozinto-Graphen auftreten, wenn also Produkte einer höheren Produktionsstufe wiederum in vorgelagerte Produkte eingehen. Dies kann vor allem bei chemischen Produktionsprozessen auftreten.