

---

# Mehrkörpersysteme

---

Christoph Woernle

# Mehrkörpersysteme

Eine Einführung in die Kinematik und  
Dynamik von Systemen starrer Körper

2., erweiterte Auflage

Christoph Woernle  
Rostock, Deutschland

ISBN 978-3-662-46686-5      ISBN 978-3-662-46687-2 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-46687-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011, 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature  
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg  
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Vorwort

Das Grundkonzept des Lehrbuches über Mehrkörpersysteme mit der von den Bindungen ausgehenden Darstellung der Mehrkörperdynamik wird in der vorliegenden zweiten Auflage fortgeführt. Die Formulierungen der Dynamik mechanischer Systeme mit Bindungen werden jetzt für holonome Massenpunktsysteme, holonome Mehrkörpersysteme und nichtholonome Systeme in den jeweils eigenen, neuen Kapiteln 5, 6 und 7 mit zusätzlichen Lehrbeispielen entwickelt. Der Leser soll damit auch ohne das Studium der weiterführenden Themen der Mehrkörperdynamik ab Kapitel 8 besser in die Lage versetzt werden, kleinere Übungsaufgaben von Hand zu lösen. Bei den Formulierungen der Bindungen in Kapitel 8 und der Dynamik offener und geschlossener Mehrkörpersysteme in den Kapiteln 9 und 10 werden zur besseren Übersicht die nichtholonomen Bindungen nicht mehr mitgeführt, was wegen ihrer geringeren technischen Bedeutung gerechtfertigt erscheint. Darüber hinaus wurden an zahlreichen Stellen Korrekturen und kleinere Ergänzungen vorgenommen.

Herrn Dr.-Ing. René Bartkowiak danke ich für die sorgfältige und kritische Durchsicht des Manuskripts. Mein Dank gilt dem Springer-Vieweg Verlag für die Herausgabe der zweiten Auflage sowie Frau Birgit Kollmar-Thoni für die Unterstützung und gute Zusammenarbeit bei der Erstellung der Druckvorlage.

Rostock,  
August 2016

*Christoph Woernle*

# Vorwort zur ersten Auflage

Mehrkörpersysteme sind spezielle mechanische Systeme von Körpern, die untereinander durch Gelenke gekoppelt sind und sich unter dem Einfluss von Kräften im Raum bewegen. Sie werden als mechanische Ersatzmodelle zur Beschreibung der Bewegungen und Beanspruchungen in komplexen mechanischen Systemen eingesetzt. Anwendungen sind zum Beispiel Straßen- und Schienenfahrzeuge, Roboter, Werkzeugmaschinen, Verarbeitungsmaschinen oder biomechanische Bewegungsabläufe. Für die Erstellung der mathematischen Simulationsmodelle stehen rechnergestützte Formalismen zur Verfügung, die Eingang in kommerzielle Simulationsprogramme gefunden haben.

Das vorliegende Buch entstand aus einem Manuskript zu meiner Vorlesung *Dynamik von Mehrkörpersystemen*, die ich seit vielen Jahren an der Universität Rostock halte. Es führt den Leser von den Grundlagen der Technischen Mechanik zu den für die rechnergestützte Aufstellung geeigneten Formulierungen der Bewegungsgleichungen von klassischen Mehrkörpersystemen mit starren Körpern. Das Buch richtet sich damit an Studierende des Maschinenbaus und verwandter Studienrichtungen insbesondere in der letzten Phase des Bachelor-Studiums oder in der ersten Phase des Master-Studiums. Darüber hinaus vermittelt es Ingenieuren und Naturwissenschaftlern, die in der beruflichen Praxis mit Mehrkörper-Simulationsmodellen arbeiten, die dazu gehörenden mathematischen und physikalischen Grundlagen.

Im Mittelpunkt der Darstellung der Mehrkörperdynamik stehen die *Bindungen*, welche die Bewegung der Teilkörper geometrisch beschränken. Die Bindungen legen die freien Bewegungsmöglichkeiten des Systems fest, und sie definieren entsprechend dem Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE die Richtungen der Reaktionskräfte und -momente. Aus den impliziten und expliziten mathematischen Darstellungen der Bindungen ergeben sich in Verbindung mit den Impuls- und Drallsätzen der Körper unmittelbar die verschiedenen bekannten Formulierungen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen als Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen in voneinander unabhängigen Minimalkoordinaten oder als differential-algebraische Gleichungssysteme in voneinander abhängigen, redundanten Koordinaten. Die bevorzugte Verwendung dieser Formulierungen richtet sich

dann nach dem topologischen Aufbau der Mehrkörpermodelle.

Bei *offenen Mehrkörpersystemen*, die eine *Baumstruktur* aufweisen, werden die Bewegungsgleichungen günstig in den relativen Gelenkkoordinaten, die hier Minimalkoordinaten sind, als Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert. Das System der Bestimmungsgleichungen für die unbekanntenen Beschleunigungen und Reaktionskräfte kann dabei mit Hilfe rekursiver Mehrkörperformalismen, welche sich an dem topologischen Aufbau des Systems orientieren, effizient gelöst werden.

Bei *geschlossenen Mehrkörpersystemen*, die *kinematische Schleifen* aufweisen, sind die Gelenkkoordinaten dagegen nicht mehr voneinander unabhängig, sondern unterliegen den *Schleifenschließbedingungen*. Für die Bewegungen der Körper gelten dadurch wesentlich komplexere Bindungen. Die Schließbedingungen sind implizite Bindungen, die i. Allg. aber nur numerisch in die explizite Form gebracht werden können. Aus diesem Grund werden die Bewegungsgleichungen hier meistens in den voneinander abhängenden Gelenkkoordinaten des *aufspannenden Baumes*, der durch gedankliches Auftrennen der Schleifen entsteht, aufgestellt. Die alternative Formulierung der Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten hat vor allem dann Vorteile, wenn die Schließbedingungen analytisch in die explizite Form überführt werden können, was in vielen Fällen möglich ist.

Die beschriebenen Methoden stellen für den Leser Grundlagen für eigene Programmentwicklungen bereit. Für das Arbeiten mit kommerziellen Mehrkörperprogrammen werden die Grundkenntnisse der verwendeten physikalischen Beschreibungen und Algorithmen vermittelt, die für die physikalisch korrekte Modellerstellung, die Beurteilung von Simulationsergebnissen und die Behandlung evtl. auftretender numerischer Probleme benötigt werden.

Meinen Mitarbeitern Dipl.-Ing. René Bartkowiak und Dipl.-Ing. Roman Rachholz danke ich für die Durchsicht des Manuskripts. Herrn Dipl.-Ing. János Zierath und Herrn André Harmel danke ich für die Unterstützung bei der Erstellung von Abbildungen. Schließlich danke ich Frau Hestermann-Beyerle vom Springer-Verlag für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die gute Zusammenarbeit.

Rostock,  
März 2011

*Christoph Woernle*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b> .....	1
1.1	Mehrkörpersysteme .....	1
1.2	Physikalische Grundlagen der Mehrkörperdynamik .....	2
1.3	Entwicklung der Mehrkörperdynamik .....	6
1.4	Mehrkörperformalismen .....	8
1.5	Anwendungen von Mehrkörpersystemen .....	11
1.6	Inhaltsübersicht .....	17
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Vektorrechnung</b> .....	19
2.1	Skalare und Vektoren .....	19
2.2	Koordinaten von Vektoren .....	19
2.3	Rechenregeln für Vektoren .....	21
2.4	Transformation von Vektorkoordinaten .....	26
2.5	Tensoren zweiter Stufe .....	29
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Kinematik</b> .....	33
3.1	Allgemeine Bewegung des starren Körpers .....	33
3.1.1	Aufgabenstellung .....	33
3.1.2	Lage .....	35
3.1.3	Geschwindigkeit, Bewegungswinder .....	36
3.1.4	Beschleunigung .....	38
3.1.5	Beispiel zur Bewegung eines starren Körpers .....	38
3.1.6	Sonderfälle der allgemeinen Bewegung .....	40
3.2	Relativbewegungen starrer Körper .....	41
3.2.1	Relative zeitliche Ableitung von Vektoren .....	41
3.2.2	Zusammensetzung zweier Bewegungen .....	45
3.2.3	Beispiel zur Zusammensetzung zweier Bewegungen .....	48
3.2.4	Umgekehrte Relativbewegung .....	53
3.3	Drehzeiger und Drehtensor .....	55
3.3.1	Drehzeiger .....	56
3.3.2	Drehtensor .....	56

3.3.3	Passive und aktive Betrachtung der Drehung	58
3.3.4	Beispiele für Drehungen	60
3.4	Mehrfache Drehungen	62
3.4.1	Definition mehrfacher Drehungen durch Drehgelenke	62
3.4.2	Drehungen um die Ausgangsachsen	63
3.4.3	Drehungen um die mitgedrehten Achsen	65
3.5	Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit	67
3.5.1	Differentielle Drehung und Winkelgeschwindigkeit	67
3.5.2	Drehtensor und Winkelgeschwindigkeit	69
3.6	KARDAN-Winkel und EULER-Winkel	71
3.6.1	$xyz$ -KARDAN-Winkel und Drehmatrix	72
3.6.2	$xyz$ -KARDAN-Winkel aus gegebener Drehmatrix	74
3.6.3	$xyz$ -KARDAN-Winkel und Winkelgeschwindigkeit	75
3.6.4	Gegenüberstellung verschiedener Drehreihenfolgen	76
3.7	EULER-Parameter (Quaternionen)	80
3.7.1	EULER-Parameter und Drehtensor	80
3.7.2	EULER-Parameter aus gegebener Drehmatrix	82
3.7.3	EULER-Parameter als Quaternionen	83
3.7.4	EULER-Parameter und mehrfache Drehungen	84
3.7.5	EULER-Parameter und Winkelgeschwindigkeit	85
3.8	RODRIGUES-Parameter	89
3.8.1	RODRIGUES-Parameter und Drehtensor	89
3.8.2	RODRIGUES-Parameter und Winkelgeschwindigkeit	89
3.9	Beispiele zu Koordinaten von Drehungen	91
3.9.1	Koordinaten einer gegebenen Drehung	91
3.9.2	Kinematische Differentialgleichungen	93
<b>4</b>	<b>Grundlagen der Dynamik</b>	<b>97</b>
4.1	Impuls und Drall	97
4.1.1	Impuls	98
4.1.2	Drall (Drehimpuls, Impulsmoment)	98
4.2	Schwerpunktsatz und Drallsatz	100
4.2.1	Impulssatz und Schwerpunktsatz	100
4.2.2	Drallsatz (Momentensatz)	101
4.3	Impuls und Drall des starren Körpers	102
4.3.1	Masse und Massenmittelpunkt	103
4.3.2	Impuls des starren Körpers	104
4.3.3	Drall des starren Körpers	104
4.4	Trägheitstensor	104
4.4.1	Eigenschaften des Trägheitstensors	105
4.4.2	Parallelverschiebung des Bezugssystems	106
4.4.3	Drehung des Bezugssystems	108
4.4.4	Hauptachsensystem	108
4.4.5	Trägheitstensor eines homogenen Kreiszyinders	110
4.5	Impulssatz und Drallsatz für den starren Körper	111



4.5.1	Impulssatz	111
4.5.2	Drallsatz	111
4.5.3	D'ALEMBERTSche Trägheitskräfte	113
4.6	Arbeit und Energie	114
4.6.1	Arbeitssatz	114
4.6.2	Konservative Kräfte, potentielle Energie, Energiesatz	115
4.6.3	Kinetische Energie des starren Körpers	117
4.7	Kraftwirkungen von Rotoren	118
4.8	Dynamik von Kreiseln	121
4.8.1	Momentenfreier Kreisel	121
4.8.2	Schwerer symmetrischer Kreisel	125
<b>5</b>	<b>Holonome Massenpunktsysteme</b>	<b>129</b>
5.1	Holonome Bindungen	129
5.1.1	Skleronome und rheonome holonome Bindungen	130
5.1.2	Zweiseitige und einseitige holonome Bindungen	133
5.2	Kinematik holonomer Massenpunktsysteme	134
5.2.1	Implizite holonome Bindungen	134
5.2.2	Freiheitsgrad und Minimalkoordinaten	137
5.2.3	Explizite holonome Bindungen	138
5.3	Dynamik holonomer Massenpunktsysteme	142
5.3.1	Impulssätze, eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte	142
5.3.2	Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE	143
5.3.3	Prinzip von JOURDAIN	146
5.3.4	Explizite Reaktionsbedingungen	148
5.3.5	Implizite Reaktionsbedingungen	148
5.4	Bewegungsgleichungen von Massenpunktsystemen	149
5.4.1	Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten	150
5.4.2	Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten	154
5.5	Beispiele holonomer Massenpunktsysteme	157
5.5.1	Doppeltes Massenpunktpendel	157
5.5.2	Ebenes Schubkurbelgetriebe	163
5.5.3	Massenpunkt auf rotierendem Ring	168
5.6	Weitere Methoden der analytischen Dynamik	172
5.6.1	Prinzip von GAUSS	172
5.6.2	LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art	174
5.6.3	Kanonische Gleichungen von HAMILTON	177
5.7	Zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen	181
5.7.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen	181
5.7.2	Differential-algebraische Gleichungen	184
5.7.3	Nichtlineare Gleichungssysteme	187

<b>6</b>	<b>Holonome Mehrkörpersysteme</b> . . . . .	189
6.1	Kinematik holonomer Mehrkörpersysteme . . . . .	189
6.1.1	Bewegungsgrößen eines starren Körpers . . . . .	189
6.1.2	Implizite holonome Bindungen . . . . .	191
6.1.3	Explizite holonome Bindungen . . . . .	194
6.2	Dynamik holonomer Mehrkörpersysteme . . . . .	197
6.2.1	Impuls- und Drallsätze . . . . .	197
6.2.2	Eingeprägte Kräfte und Momente . . . . .	198
6.2.3	Prinzip von JOURDAIN für Mehrkörpersysteme . . . . .	202
6.2.4	Explizite Reaktionsbedingungen . . . . .	205
6.2.5	Implizite Reaktionsbedingungen . . . . .	205
6.3	Bewegungsgleichungen räumlicher Mehrkörpersysteme . . . . .	206
6.3.1	Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten . . . . .	206
6.3.2	Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten . . . . .	208
6.3.3	Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten . . . . .	210
6.4	Bewegungsgleichungen ebener Mehrkörpersysteme . . . . .	212
6.4.1	Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten . . . . .	214
6.4.2	Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten . . . . .	216
6.5	Beispiele ebener Mehrkörpersysteme . . . . .	218
6.5.1	Doppeltes Körperpendel . . . . .	218
6.5.2	Rollpendel . . . . .	224
6.6	Beispiele räumlicher Mehrkörpersysteme . . . . .	226
6.6.1	Schwerer Kreisel mit Fixpunktlagerung . . . . .	227
6.6.2	Roboter mit zwei Drehgelenken . . . . .	233
<b>7</b>	<b>Nichtholonome Systeme</b> . . . . .	241
7.1	Kinematik nichtholonomer Systeme . . . . .	241
7.1.1	Implizite nichtholonome Bindungen . . . . .	242
7.1.2	Freiheitsgrad nichtholonomer Systeme . . . . .	244
7.1.3	Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten . . . . .	244
7.1.4	Explizite nichtholonome Bindungen . . . . .	245
7.2	Dynamik nichtholonomer Systeme . . . . .	246
7.2.1	Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten . . . . .	247
7.2.2	Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten . . . . .	248
7.3	Auf einer rotierenden Ebene rollende Kugel . . . . .	251
7.3.1	Bewegungsgleichungen in Absolutkoordinaten . . . . .	252
7.3.2	Bewegungsgleichungen in Minimalgeschwindigkeiten . . . . .	256
7.4	Integrierbarkeit kinematischer Bindungen . . . . .	258
7.4.1	Wagen mit zwei Rädern (Kufe) . . . . .	259
7.4.2	Integrierbarkeitsbedingungen . . . . .	262
7.4.3	Anwendungen der Integrierbarkeitsbedingungen . . . . .	265

<b>8</b>	<b>Bindungen in Mehrkörpersystemen</b> .....	273
8.1	Gelenke in Mehrkörpersystemen .....	273
8.1.1	Gelenke mit holonomen skleronomen Bindungen .....	274
8.1.2	Gelenke mit holonomen rheonomen Bindungen .....	276
8.1.3	Zur Modellierung von Gelenken .....	276
8.2	Klassifizierungen von Mehrkörpersystemen .....	278
8.2.1	Topologische Klassifizierung .....	279
8.2.2	Kinematische Klassifizierung .....	281
8.3	Freiheitsgrad von Mehrkörpersystemen .....	282
8.3.1	Freiheitsgrad räumlicher Mehrkörpersysteme .....	283
8.3.2	Freiheitsgrad überbestimmter Mehrkörpersysteme .....	286
8.3.3	Freiheitsgrad ebener und sphärischer Systeme .....	288
8.4	Implizite holonome Bindungen von Gelenken .....	289
8.4.1	Implizite Bindungen eines allgemeinen Gelenks .....	289
8.4.2	Elementare implizite Bindungen .....	290
8.4.3	Implizite Bindungen des Drehgelenks .....	294
8.5	Explizite holonome Bindungen von Gelenken .....	295
8.5.1	Explizite Bindungen eines allgemeinen Gelenks .....	295
8.5.2	Explizite Bindungen des Drehgelenks .....	299
8.5.3	Explizite Bindungen des Schubgelenks .....	301
8.5.4	Explizite Bindungen des Kugelgelenks .....	302
8.6	Reaktionsbedingungen für Gelenke .....	304
8.6.1	Explizite Reaktionsbedingungen .....	305
8.6.2	Implizite Reaktionsbedingungen .....	305
8.6.3	Reaktionsbedingungen für das Drehgelenk .....	306
8.7	Verwendung der Bindungen in Bewegungsgleichungen .....	308
<b>9</b>	<b>Offene Mehrkörpersysteme</b> .....	311
9.1	Topologie offener Mehrkörpersysteme .....	311
9.2	Kinematik offener Mehrkörpersysteme .....	313
9.2.1	Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten .....	314
9.2.2	Explizite Bindungen in einer Kettenstruktur .....	315
9.2.3	Kettenstruktur mit Standardgelenken .....	321
9.2.4	Explizite Bindungen in einer Baumstruktur .....	325
9.3	Dynamik offener Mehrkörpersysteme .....	327
9.3.1	Implizite Reaktionsbedingungen für offene MKS .....	327
9.3.2	Impuls- und Drallsätze .....	331
9.4	Bewegungsgleichungen offener Mehrkörpersysteme .....	333
9.5	Nichtrekursiver Formalismus für offene MKS .....	335
9.6	Rekursiver Formalismus für offene MKS .....	337
9.6.1	Rekursive Lösung für Systeme mit Kettenstruktur .....	337
9.6.2	Rekursive Lösung für Systeme mit Baumstruktur .....	341
9.7	Knickarm-Roboter .....	342

<b>10 Geschlossene Mehrkörpersysteme</b> .....	351
10.1 Kinematik einer einzelnen Mehrkörperschleife .....	351
10.1.1 Implizite Schließbedingungen .....	352
10.1.2 Explizite Schließbedingungen .....	357
10.1.3 Kinematik eines ebenen Gelenkvierecks .....	361
10.2 Kinematik mehrschleifiger Systeme .....	370
10.2.1 Primäre Gelenkkoordinaten .....	370
10.2.2 Implizite Schließbedingungen .....	372
10.2.3 Zur Definition unabhängiger Schleifen .....	375
10.2.4 Zusätzliche kinematische Ketten .....	377
10.2.5 Explizite Schließbedingungen .....	378
10.3 Dynamik geschlossener Mehrkörpersysteme .....	380
10.3.1 Sekundäre Reaktionskraftwinder .....	380
10.3.2 Impuls- und Drallsätze .....	382
10.4 Bewegungsgleichungen in primären Gelenkkoordinaten .....	382
10.4.1 Nichtrekursiver Formalismus für geschlossene MKS .....	384
10.4.2 Rekursiver Formalismus für geschlossene MKS .....	386
10.5 Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten .....	391
10.5.1 Zustandsgleichungen .....	391
10.5.2 Minimalform der Bewegungsgleichungen .....	392
10.6 Dynamik eines ebenen Schubkurbelgetriebes .....	393
10.6.1 Bewegungsgleichungen in primären Gelenkkoordinaten .....	394
10.6.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform .....	397
10.7 Dynamik eines räumlichen Koppelgetriebes .....	398
10.7.1 Bewegungsgleichungen in primären Gelenkkoordinaten .....	399
10.7.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform .....	402
10.8 Dynamik eines Parallelroboters .....	407
10.8.1 Mehrkörpermodelle ohne redundante Bindungen .....	408
10.8.2 Bewegungsgleichungen in primären Gelenkkoordinaten .....	410
<b>A Mathematische Grundlagen</b> .....	417
A.1 Matrizen .....	417
A.2 Quaternionen .....	422
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	425
<b>Sachverzeichnis</b> .....	431

# Schreibweisen und Formelzeichen

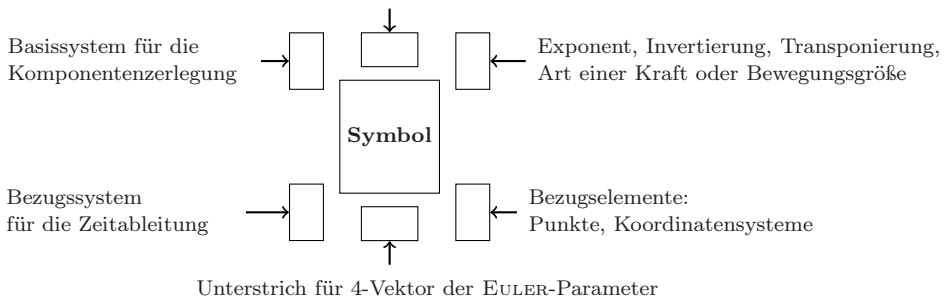
## Schreibweisen

**Symboldarstellung** Skalare werden durch Buchstaben mit normaler Schrift, Vektoren und Spaltenmatrizen durch in der Regel kleine Buchstaben in fetter Schrift sowie Tensoren zweiter Stufe und Matrizen durch große Buchstaben in fetter Schrift gekennzeichnet. Der Nullvektor und die Nullmatrix werden ohne Dimensionsangabe als  $\mathbf{0}$  geschrieben. Handschriftlich wird der Fettdruck durch einen Unterstrich ersetzt.

**Koordinatensysteme** Orthonormierte Koordinatensysteme  $(O_i, x_i, y_i, z_i)$  werden durch  $\mathcal{K}_i$  gekennzeichnet.

## Schema der Indizierung

- , .. Operatoren für Zeitableitungen
- ~ Bilden der schiefsymmetrischen Matrix zum Vektorprodukt
- Notation für Terme in Bindungsgleichungen, auch konjugierte Quaternion
- ^ Zusammenfassung rotatorischer und translatorischer Größen



**Notation für mechanische Größen** Kinematische Größen relativer Bewegungen haben einem Doppelindex der entsprechenden Bezugssysteme:

$$\mathbf{R}_{ji} \quad (3,3)\text{-Drehtensor, dreht } \mathcal{K}_i \text{ nach } \mathcal{K}_j,$$

$\underline{p}_{ji}$	4-Vektor der EULER-Parameter, drehen $\mathcal{K}_i$ nach $\mathcal{K}_j$ ,
$\underline{r}_{ji}$	Vektor vom Punkt $O_i$ zum Punkt $O_j$ ,
$\underline{v}_{ji}$	Vektor der Geschwindigkeit von $O_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ ,
$\underline{\omega}_{ji}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ ,
$\underline{a}_{ji}$	Vektor der Beschleunigung von $O_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ ,
$\underline{\alpha}_{ji}$	Vektor der Winkelbeschleunigung von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ .

Ist das Bezugssystem das raumfeste Inertialsystem  $\mathcal{K}_0$ , so wird der zweite Index in der Regel weggelassen, also z. B.  $\underline{v}_j \hat{=} \underline{v}_{j0}$ .

Kräfte und Momente werden bezeichnet durch

$\underline{f}$	Kraftvektor,
$\underline{\tau}$	Momentvektor.

**Koordinatendarstellung von Vektoren** Das Koordinatensystem für die Koordinatendarstellung von Vektoren wird durch den linken oberen Index angegeben, also z. B.

${}^k \underline{r}_{ji}$  Koordinaten des Vektors  $\underline{r}_{ji}$  im System  $\mathcal{K}_k$ .

Bei Transformationsmatrizen stehen die Indizes der Koordinatensysteme ebenfalls links oben,

${}^{ij} \underline{T}$  orthogonale (3,3)-Transformationsmatrix,

überführt Vektorkoordinaten von  $\mathcal{K}_j$  nach  $\mathcal{K}_i$ , also  ${}^i \underline{r} = {}^{ij} \underline{T} {}^j \underline{r}$ . Es ist  ${}^{ij} \underline{T} = {}^i \underline{R}_{ji}$ .

**Bezugssystem für die Zeitableitung von Vektoren** Das Bezugssystem für die zeitliche Ableitung von Vektoren und Tensoren wird durch den unteren linken Index angegeben, siehe Abschnitt 3.2.1. Dieser Index tritt damit nur in Verbindung mit der zeitlichen Ableitung (Ableitungspunkt) auf, z. B.

${}^k \dot{\underline{r}}_{ji}$  zeitliche Änderung des Vektors  $\underline{r}_{ji}$  relativ zum Bezugssystem  $\mathcal{K}_k$ .

**Räumliche Vektoren** Rotatorische und translatorische mechanische Größen werden zu – hier so genannten – räumlichen 7-Vektoren bzw. 6-Vektoren, gekennzeichnet durch ein übergesetztes  $\hat{\ }^$ , zusammengefasst,

$$\hat{\underline{r}}_{ji} = \begin{bmatrix} \underline{p}_{ji} \\ \underline{r}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{v}}_{ji} = \begin{bmatrix} \underline{\omega}_{ji} \\ \underline{v}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{a}}_{ji} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_{ji} \\ \underline{a}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{f}}_j = \begin{bmatrix} \underline{\tau}_j \\ \underline{f}_j \end{bmatrix}.$$

In expliziten Bindungen wird unter  $\hat{\underline{r}}_{ji}$  die Menge der Lagegrößen  $\underline{R}_{ji}$  und  $\underline{r}_{ji}$  verstanden,  $\hat{\underline{r}}_{ji} = \{\underline{R}_{ji}, \underline{r}_{ji}\}$ .

Für das gesamte System mit  $n$  Körpern werden die jeweiligen Größen zu  $(7n,1)$ - bzw.  $(6n,1)$ -Vektoren ohne Index zusammengefasst,

$$\hat{\underline{r}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{r}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\underline{r}}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{v}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\underline{v}}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{a}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\underline{a}}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{f}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{f}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\underline{f}}_n \end{bmatrix}.$$

**Ableitungsregeln in Matrizenschreibweise** Bezeichnet  $\mathbf{x}$  einen Spaltenvektor (Koordinatenvektor), also

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots x_n]^T, \quad (0.1)$$

so wird die Ableitung der skalaren Funktion  $y(\mathbf{x}) = y(x_1, \dots, x_n)$  nach dem Vektor  $\mathbf{x}$  als Zeilenvektor definiert,

$$\frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial y}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y}{\partial x_n} \right]. \quad (0.2)$$

Die Ableitung von  $y(\mathbf{x})$  nach dem Zeilenvektor  $\mathbf{x}^T$  wird als Spaltenvektor definiert,

$$\frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \left( \frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T. \quad (0.3)$$

Speziell gilt für die Ableitung der *linearen Form*  $y(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{a} \quad (0.4)$$

und für die Ableitung der *quadratischen Form*  $y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  mit  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^T} = 2 \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (0.5)$$

Die Ableitung der Funktion eines  $m$ -Vektors  $\mathbf{y}$  von einem  $n$ -Vektor  $\mathbf{x}$  nach dem Vektor  $\mathbf{x}$  ergibt die  $(m,n)$ -Funktionalmatrix oder JACOBI-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right). \quad (0.6)$$

Die totale Ableitung der  $m$ -Vektorfunktion  $\mathbf{y}(\mathbf{x}(t), t)$  mit dem  $n$ -Vektor  $\mathbf{x}(t)$  nach der Zeit  $t$  lautet nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}(\mathbf{x}(t), t)}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (0.7)$$

## Verwendete Formelzeichen

Es wird die Nummer der Gleichung angegeben, in der das jeweilige Formelzeichen zum ersten Mal verwendet wird. Zu Bindungen gelten die Angaben L – Lageebene, G – Geschwindigkeitsebene, B – Beschleunigungsebene.

### Lateinische Buchstaben

$a$	Beschleunigungsvektor, (3.23)
$\bar{a}$	Vektor in expliziter Bindung (B), (5.40)
$\bar{a}^{\text{rel}}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (B), (8.62)
$\hat{a}$	Vektor der räumlichen Beschleunigung, (6.11)
$\tilde{a}$	räumlicher Vektor in expliziter Bindung (B), (9.35)
$\tilde{a}^{\text{rel}}$	räumlicher Vektor in expliziter Gelenkbindung (B), (8.61)
$\hat{a}^\circ$	Anteil d. Körperbeschleunigungen im rekursiven Formalismus, (10.120)
$A$	Fläche, (4.15)
$A$	Hauptträgheitsmoment, (4.54)
$\mathbf{A}$	Matrix im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (10.120)
$b$	Anzahl Bindungen, (5.27), (6.26), (7.6)
$b^r$	Anzahl redundanter Bindungen, (5.79), (8.10)
$b^u$	Anzahl unabhängiger Bindungen, (8.10)
$b_L$	Anzahl geometrischer Bindungen, (7.7)
$b^s$	Anzahl sekundärer Gelenkbindungen, (10.4)
$b^{\text{sk}}$	Anzahl sklonomer holonomer Gelenkbindungen, (8.1)
$b^{\text{rh}}$	Anzahl rheonomer holonomer Gelenkbindungen, (8.2)
$b$	Vektor vom Körper-Bezugspunkt zu einem Körperpunkt, (4.8)
$B$	Hauptträgheitsmoment, (4.54)
$\mathbf{B}$	Versatzmatrix in expliziten Gelenkbindungen (G,B), (8.54)
$c$	Federkonstante, (4.83)
$c$	Vektor von einem Körper-Bezugspunkt zu einer Gelenkachse, (8.17)
$C$	Hauptträgheitsmoment, (4.54)
$\mathbf{C}$	JACOBI-Matrix in expliziten Gelenkbindungen (G,B), (8.54)
$\mathbf{C}_{R/T}$	JACOBI-Matrix der Rotation/Translation eines Gelenks, (8.52), (8.53)
$d$	Vektor von einer Gelenkachse zu einem Körper-Bezugspunkt, (8.64)
$\mathbf{D}$	Koeffizientenmatrix der Bestimmungsgleichungen, (10.119)
$e$	Einheitsvektor, (2.1)
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix bzw. Einheitstensor, (2.37)
$f$	(Geschwindigkeits-)Freiheitsgrad, (5.27), (6.26), (7.6)
$f^\circ$	Anzahl primärer Gelenkkoordinaten und Freiheitsgrad des aufspannenden Baumes, (10.1)
$f_L$	Lage-Freiheitsgrad, (7.7)
$f$	Kraftvektor, (4.12)



$f^a, f^i$	äußere bzw. innere Kraft, (4.13)
$f^e$	eingeprägte Kraft, (5.48)
$f^r$	Reaktionskraft, (5.48)
$\hat{f}^c$	Kraftwinder von Zentrifugalkräften und Kreiselmomenten, (9.80)
$\hat{f}^e$	Eingepägter Kraftwinder, (9.80)
$\hat{f}^{ec}$	Summe von $\hat{f}^c$ und $\hat{f}^e$ , (9.83)
$\hat{f}^p$	Reaktionskraftwinder in primären Gelenken, (9.63)
$\hat{f}^{po}$	Anteil der Reaktionskraftwinder im rekursiven Formalismus, (10.120)
$\hat{f}^r$	Reaktionskraftwinder, (8.83), (9.65)
$\hat{f}^s$	Reaktionskraftwinder in sekundären Gelenken, (10.102)
$F$	Matrix im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (10.120)
$g$	Erdbeschleunigung, (4.28)
$g$	Residuum impliziter Bindungen (L), (5.2)
$g^s$	Residuum impliziter sekundärer Bindungen (L), (10.4)
$g^\ell$	Residuum impliziter Schließbedingungen (L), (10.6)
$g_E$	Residuum der EULER-Parameter (L), (3.178)
$G$	Bindungsmatrix in impliziten Bindungen (G,B), (5.17)
$G_R$	Bindungsmatrix der Rotation (G,B), (6.17)
$G_T$	Bindungsmatrix der Translation (G,B), (6.17)
$G^s$	Bindungsmatrix in sekundären Bindungen (G,B), (10.7)
$G^\ell$	Bindungsmatrix in impliziten Schließbedingungen (G,B), (10.9)
$H$	HAMILTON-Funktion, (5.225)
$H$	Matrix in kinematischer Differentialgleichung, (3.173), (3.211) (9.15)
$\hat{H}$	Matrix in kinematischer Differentialgleichung für absolute Körperkoordinaten, (6.10)
$\bar{H}$	Matrix in kinematischer Differentialgleichung für Minimalkoordinaten bei geschlossenen MKS, (10.30), (10.101)
$j$	Spaltenvektor der JACOBI-Matrix $J$ , (7.77)
$J$	JACOBI-Matrix in expliziten Bindungen (G,B), (5.33), (6.36)
$J_R$	JACOBI-Matrix der Rotation (G,B), (6.34), (9.28)
$J_T$	JACOBI-Matrix der Translation (G,B), (6.30), (9.28)
$J^\ell$	JACOBI-Matrix in expliziten Schließbedingungen (G,B), (10.26)
$k^c$	verallgemeinerte Zentrifugal- und CORIOLIS-Kräfte, (5.93), (6.91), (9.91), (10.114)
$k^e$	verallgemeinerte eingeprägte Kräfte, (5.94), (6.92), (9.92), (10.114)
$k^n$	verallgemeinerte nichtkonservative Kräfte, (5.214)
$k^s$	verallgemeinerte sekundäre Reaktionskräfte in geschlossenen MKS, bezogen auf primäre Gelenkgeschwindigkeiten, (10.114)
$\bar{k}^c$	verallgemeinerte Zentrifugal- und CORIOLIS-Kräfte in geschlossenen MKS, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten, (10.153)

$\bar{k}^e$	verallgemeinerte eingeprägte Kräfte in geschlossenen MKS, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten, (10.153)
$l$	Länge, (3.25)
$l$	Differenzvektor in einer Gelenkbindung, (8.17)
$l$	Verbindungsvektor in Beispielen geschlossener MKS, (10.36)
$l$	Drallvektor, (4.6)
$L$	LAGRANGE-Funktion, (5.212)
$L$	Matrix in kinematischer Differentialgleichung, (3.172), (3.212)
$L$	Matrix im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (10.120)
$m$	Masse, (4.3)
$m$	Einheitsvektor in impliziter Gelenkbindung, (8.42)
$M$	Massenmatrix, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten, (5.91), (6.90), (9.85); bei geschlossenen MKS bez. auf primäre Gelenkgeschwindigkeiten, (10.114)
$\bar{M}$	Massenmatrix geschlossener MKS, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten (10.153)
$\hat{M}$	Massenmatrix, bezogen auf Absolutgeschwindigkeiten, (5.50), (6.49), (9.80)
$n$	Anzahl Massenpunkte bzw. Anzahl Körper
$n_G$	Anzahl Gelenke, (8.4)
$n_S$	Anzahl kinematischer Schleifen, (8.5)
$n$	Normalenvektor, Einheitsvektor in impliziter Gelenkbindung, (8.42)
$N$	Matrix im rekursiven Formalismus, (9.105)
$p$	Impulsvektor, (4.1), verallgemeinerter Impuls, (5.218)
$\underline{p}$	4-Vektor der EULER-Parameter (Quaternionen), (3.177)
$p_s$	Skalarteil der EULER-Parameter (Quaternionen), (3.177)
$p$	Vektorteil der EULER-Parameter (Quaternionen), (3.177)
$P$	Leistung, (5.64)
$q$	minimale (voneinander unabhängige) Lagekoordinaten, (5.29)
$r$	Ortsvektor, (3.1)
$\hat{r}$	Lagegrößen eines Körpers, (6.1), (6.6)
$R$	Radius, (4.28)
$R$	Drehtensor (Drehmatrix), (3.101)
$s$	minimale (voneinander unabhängige) Geschwindigkeiten, (5.97)
$S$	Spur einer Drehmatrix, (3.188)
$S$	Inzidenzmatrix, (9.1)
$t$	Zeit, (3.1)
$T$	kinetische Energie, (4.84)
${}^{ij}T$	Transformationsmatrix für Vektorkoordinaten (Drehmatrix), (2.51)
$T$	Wegematrix, (9.3)
$u$	Einheitsvektor einer Drehachse, (3.101)

$U$	potentielle Energie, (4.76)
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor, (3.11)
$\bar{\mathbf{v}}$	Vektor in expliziter Bindung (G), (5.34)
$\bar{\mathbf{v}}^{\text{rel}}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (G), (8.53)
$\hat{\mathbf{v}}$	Vektor der räumlichen Geschwindigkeit, (6.7)
$\bar{\hat{\mathbf{v}}}$	räumlicher Vektor in expliziter Bindung (G), (9.26)
$\bar{\hat{\mathbf{v}}}^{\text{rel}}$	räumlicher Vektor in expliziter Gelenkbindung (G), (8.54)
$V$	Volumen, (4.15)
$\mathbf{w}$	Drehachs-Einheitsvektor im Drehzeiger, (3.125)
$W$	Arbeit, (4.75)
$\mathbf{x}$	Vektor von Zustandsgrößen, (5.98)
$\mathbf{x}$	Lagekoordinaten ((7.76))
$z$	Zustandsgröße im integralen Kraftgesetz, (6.56)
$Z$	Zwang im Prinzip von GAUSS, (5.187)

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	KARDAN-Winkel, (3.164)
$\boldsymbol{\alpha}$	Vektor der Winkelbeschleunigung, (3.24)
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$	Vektor in expliziter Bindung (B), (9.32)
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{rel}}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (B), (8.62)
$\beta$	KARDAN-Winkel, (3.164)
$\boldsymbol{\beta}$	relative Gelenkkoordinaten, (9.12); bei geschlossenen MKS primäre Gelenkkoordinaten, (10.1)
$\boldsymbol{\beta}$	Vektor der drei KARDAN- oder EULER-Winkel, (3.164)
$\gamma$	KARDAN-Winkel, (3.164)
$\bar{\gamma}$	Term in impliziter Bindung (G), (5.17)
$\bar{\gamma}^{\text{s}}$	Term in impliziter sekundärer Bindung (G), (10.7)
$\bar{\gamma}^{\ell}$	Term in impliziter Schließbedingung (G), (10.9)
$\bar{\bar{\gamma}}$	Term in impliziter Bindung (B), (5.23)
$\bar{\bar{\gamma}}^{\text{s}}$	Term in impliziter sekundärer Bindung (B), (10.12)
$\bar{\bar{\gamma}}^{\ell}$	Term in impliziter Schließbedingung (B), (10.14)
$\zeta$	Vektor vom Massenmittelpunkt zu einem Körperpunkt, (4.42)
$\eta$	relative Gelenkgeschwindigkeiten, (9.14); bei geschlossenen MKS primäre Gelenkgeschwindigkeiten, (10.1)
$\bar{\eta}$	Term in expliziter Schließbedingung (G), (10.26)
$\bar{\eta}$	Term in expliziter Schließbedingung (B), (10.33)
$\dot{\eta}^{\circ}$	Anteil der primären Gelenkbeschleunigungen im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (10.120)

$\theta$	EULER-Winkel, Tabelle 3.10
$\Theta, \theta$	Trägheitstensor, Massenträgheitsmoment, (4.33), (4.38)
$\lambda$	RODRIGUES-Parameter, (3.219)
$\lambda$	minimale Reaktionskoordinaten (LAGRANGE-Multiplikatoren), (5.66)
$\lambda^s$	sekundäre Reaktionskoordinaten, (10.102)
$\rho$	Dichte, (4.26)
$\tau$	Momentvektor, (4.18)
$\tau^e$	eingepprägtes Moment, (9.79)
$\tau^{kr}$	Kreiselmoment, (4.70)
$\tau^r$	Reaktionsmoment, (7.20), (8.83)
$\varphi$	Drehwinkel im Drehzeiger, (3.101)
$\phi$	EULER-Winkel, Tabelle 3.10
$\phi$	Drehwinkel (differentieller Drehwinkel $d\phi$ ), (3.139)
$\Phi$	Drehvektor (differentieller Drehvektor $d\Phi$ ), (3.139)
$\psi$	Drehwinkel im Drehzeiger, (3.125)
$\psi$	EULER-Winkel, Tabelle 3.10
$\Psi$	Vektor der rechten Seite einer Zustandsgleichung, (5.98)
$\omega$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit, (3.13)
$\bar{\omega}$	Vektor in expliziter Bindung (G), (9.28)
$\bar{\omega}^{rel}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (G), (8.52)

### Rechts hochgestellte Attribute

au, in	äußere bzw. innere Kraft, (4.13)
c	Zentrifugal- und CORIOLIS-Kraft, (5.93)
e	eingepprägte Kraft, (5.48)
k	konservative Kraft, (5.210)
kr	Kreiselmoment, (4.70)
$\ell$	auf Schleifenschließbedingungen bezogene Größe, (10.6)
n	nichtkonservative Kraft, (5.211)
o	auf aufspannenden Baum bezogene Größe, (10.1)
p	auf primäre Gelenke bezogene Größe, (9.63)
r	Reaktionskraft bzw. -moment, (5.48)
rel	auf Gelenk-Relativbewegung bezogene Größe, (8.52), (9.19)
s	auf sekundäre Gelenke kinematischer Schleifen bezogene Größe, (10.4)
sk, rh	skleronom bzw. rheonom, (8.2)
u, a	unabhängige bzw. abhängige primäre Gelenkkoordinaten, (10.19)
t	D'ALEMBERTSche Trägheitskraft bzw. -Drehmoment, (4.67)
*	aufsummierte Größen im rekursiven Formalismus, (9.109)