

# **Mathématiques et Applications**

Directeurs de la collection:  
J. Garnier et V. Perrier

76

# MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

Comité de Lecture 2012–2015/Editorial Board 2012–2015

Rémi ABGRALL  
Inst. Math., University of Zurich, CH  
remi.abgrall@math.uzh.ch

Grégoire ALLAIRE  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
gregoire.allaire@polytechnique.fr

Michel BENAÏM  
Inst. Math., Univ. de Neuchâtel, CH  
michel.benaim@unine.ch

Maitine BERGOUNIOUX  
MAPMO, Université d'Orléans, FR  
maitine.bergounioux@univ-orleans.fr

Thierry COLIN  
Inst. Math., Université Bordeaux 1, FR  
colin@math.u-bordeaux1.fr

Marie-Christine COSTA  
UMA, ENSTA, Paris, FR  
marie-christine.costa@ensta.fr

Arnaud DEBUSSCHE  
ENS Cachan, Bruz, FR  
arnaud.debussche@bretagne.ens-cachan.fr

Isabelle GALLAGHER  
Inst. Math. Jussieu, Univ. Paris 7, FR  
gallagher@math.jussieu.fr

Josselin GARNIER  
Lab. Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7, FR  
garnier@math.univ-paris-diderot.fr

Stéphane GAUBERT  
INRIA, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
stephane.gaubert@inria.fr

Emmanuel GOBET  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
emmanuel.gobet@polytechnique.edu

Raphaèle HERBIN  
CMI LATP, Université d'Aix-Marseille, FR  
raphaele.herbin@latp.univ-mrs.fr

Marc HOFFMANN  
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, FR  
hoffmann@ceremade.dauphine.fr

Claude LE BRIS  
CERMICS, ENPC, Marne la Vallée, FR  
lebris@cermics.enpc.fr

Sylvie MÉLÉARD  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
sylvie.meleard@polytechnique.edu

Felix OTTO  
MPI MIS Leipzig, GE  
felix.otto@mis.mpg.de

Valérie PERRIER  
Lab. Jean-Kunztmann, ENSIMAG, Grenoble, FR  
valerie.perrier@imag.fr

Philippe ROBERT  
INRIA Rocquencourt, Le Chesnay, FR  
philippe.robert@inria.fr

Pierre ROUCHON  
Automatique et Systèmes, École Mines, Paris, FR  
pierre.rouchon@ensmp.fr

Bruno SALVY  
INRIA, LIP - ENS Lyon, FR  
bruno.salvy@inria.fr

Annick SARTENAER  
Dépt. Mathématiques, Univ. Namur, Namur, BE  
annick.sartenaer@fundp.ac.be

Eric SONNENDRÜCKER  
MPI für Plasmaphysik, Garching, GE  
eric.sonnendruecker@ipp.mpg.de

Alain TROUVÉ  
CMLA, ENS Cachan, FR  
trouve@cmla.ens-cachan.fr

Cédric VILLANI  
IHP, Paris, FR  
villani@math.univ-lyon1.fr

Enrique ZUAZUA  
BCAM, Bilbao, ES  
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection:  
J. GARNIER et V. PERRIER

Maitine Bergounioux

Introduction au traitement  
mathématique des  
images - méthodes  
déterministes

Maitine Bergounioux  
UFR Sciences  
Université d'Orléans  
Orléans Cedex  
France

ISSN 1154-483X                      ISSN 2198-3275 (electronic)  
Mathématiques et Applications  
ISBN 978-3-662-46538-7            ISBN 978-3-662-46539-4 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-46539-4

Library of Congress Control Number: 2015932498

Mathematics Subject Classification (2010): 68U10, 94A08, 35A15

Springer Heidelberg New York Dordrecht London

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.

Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Imprimé sur papier non acide

Springer-Verlag France S.A.R.L. is part of Springer Science+Business Media  
([www.springer.com](http://www.springer.com))

# Préface

Ce cours se veut une introduction au traitement d'image mathématique. Il est issu d'un enseignement donné depuis 2008 au sein du MASTER de Mathématiques d'Orléans. La plupart des méthodes présentées sont des méthodes de base qui sont à l'heure actuelle largement approfondies et améliorées par les chercheurs du champ. Cet ouvrage se veut donc une introduction à la discipline. Pour le lecteur qui souhaite en savoir davantage nous renvoyons à la bibliographie qui permet d'approfondir les différents sujets. Nous n'abordons également que les méthodes « déterministes » ce qui fait que cet ouvrage n'est que partiel dans la présentation des techniques. Les méthodes probabilistes et/ou statistiques sont en effet très utilisées en traitement d'image mais nous avons choisi de ne pas les mentionner faute de place et de compétences.

Une partie des informations, exemples, illustrations contenus dans ce livre a été récoltée au fil de mes investigations sur Internet. Je remercie tous les anonymes (et WIKIPEDIA) qui ont contribué de fait à enrichir cet ouvrage. L'hibiscus omniprésent dans ce livre a fleuri en avril 2010 à Byblos au Liban et la maisonnette du chapitre 5 est un exemple typique d'architecture du Lot.

Je voudrais, pour terminer, remercier très chaleureusement Gabriel Peyré, pour sa lecture attentive et ses nombreuses remarques et suggestions toujours pertinentes. Ce livre lui doit beaucoup.



Orléans, 10 janvier 2015



*Maitine Bergounioux*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b> .....	1
1.1	Les images numériques .....	3
1.1.1	Les images en niveaux de gris .....	4
1.1.2	Les images binaires (noir ou blanc) .....	5
1.1.3	Les images couleur .....	5
1.1.4	Échantillonnage et quantification .....	5
1.2	Quelques procédés d'acquisition .....	7
1.2.1	Le système visuel .....	8
1.2.2	Imagerie « grand public » : photographie argentique ..	10
1.2.3	Imagerie « grand public » : photographie numérique ..	11
1.2.4	Imagerie « grand public » : numérisation des textes et des images .....	12
1.3	L'imagerie médicale .....	13
1.3.1	La radiographie .....	14
1.3.2	La tomographie (scanner) .....	15
1.3.3	Les ultrasons (échographie) .....	16
1.3.4	L'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM) .	17
1.3.5	L'imagerie par radioactivité .....	19
1.3.6	Méthodes optiques .....	19
1.4	Autres applications .....	21
1.5	Différents aspects du traitement des images .....	23
<b>2</b>	<b>Traitement ponctuel des images numériques</b> .....	25
2.1	Recadrage de dynamique - contraste .....	25
2.1.1	Transformation de recadrage .....	26
2.2	Égalisation de l'histogramme .....	28
2.3	Binarisation-seuillage .....	29
<b>3</b>	<b>Débruitage par filtrage linéaire</b> .....	31
3.1	Le « bruit » .....	32
3.1.1	Bruit thermique .....	33

3.1.2	Bruit « Poivre et sel »	33
3.1.3	Bruit de grenaille	33
3.1.4	Le flou	33
3.1.5	Modélisation du bruit et du flou	34
3.2	Filtrage spatial (bruit additif)	36
3.2.1	Filtrage unidimensionnel	36
3.2.2	Filtres de convolution	38
3.3	Filtrage fréquentiel (bruit additif)	44
3.3.1	Filtre passe-bas	44
3.3.2	Filtres passe-haut	47
3.4	Filtrage différentiel	49
3.4.1	Calcul des gradients discrets	50
3.4.2	Approximation de la dérivée seconde	55
3.4.3	Filtrage par équations aux dérivées partielles	56
3.4.4	Mise en œuvre numérique	58
3.5	Déconvolution (cas d'un flou)	59
3.5.1	Approche « spatiale » : équation de la chaleur rétrograde (inverse)	59
3.5.2	Filtre inverse et algorithme de Van Cittert	61
<b>4</b>	<b>Débruitage par méthodes non linéaires</b>	<b>63</b>
4.1	Filtre médian	63
4.2	Filtrage par EDP non linéaire : le modèle de Perona-Malik	65
4.3	Méthodes variationnelles	66
4.3.1	Régularisation de Tychonov	67
4.3.2	Le modèle continu de Rudin-Osher-Fatemi	70
4.3.3	Modèle discret de Rudin-Osher-Fatemi	74
4.4	Filtrage par ondelettes	83
4.5	Déconvolution	87
4.5.1	Approche fréquentielle : Filtre de Wiener	87
4.5.2	Méthode SECB	90
4.5.3	Déconvolution de Richardson-Lucy	91
4.5.4	Modèle variationnel de Rudin-Osher-Fatemi	92
<b>5</b>	<b>Segmentation</b>	<b>97</b>
5.1	Introduction	97
5.2	Segmentation par seuillage de gradients	98
5.2.1	Segmentation par filtrage passe-haut	98
5.2.2	Détecteur de Marr-Hildrett	99
5.2.3	Détecteur de Canny	100
5.3	Détecteurs d'éléments géométriques particuliers	102
5.3.1	Détecteur de coin de Harris	102
5.3.2	Transformation de Hough	103
5.4	Méthodes variationnelles	109
5.4.1	Méthode des contours actifs	110

5.4.2	Le modèle de Mumford-Shah	123
5.5	Fermeture des contours	126
5.6	Segmentation en régions	128
5.6.1	Segmentation par seuillage d'histogramme	128
5.6.2	Algorithme K-means	129
5.6.3	Croissance de régions	131
5.6.4	Décomposition et fusion (Split and merge)	133
5.6.5	Méthode variationnelle	134
<b>6</b>	<b>Morphologie mathématique</b>	<b>137</b>
6.1	Morphologie mathématique ensembliste	137
6.1.1	Les opérations de base	137
6.1.2	Squelettisation	142
6.2	Morphologie mathématique fonctionnelle - Images à niveaux de gris	143
6.2.1	Dilatation, érosion et gradient morphologique	144
6.2.2	Ouverture et fermeture	147
6.2.3	Filtrage alterné séquentiel	150
6.2.4	Segmentation : ligne de partage des eaux (Watershed)	153
<b>7</b>	<b>Applications</b>	<b>157</b>
7.1	Stéganographie et tatouage	157
7.1.1	Une méthode simple de stéganographie	158
7.1.2	Tatouage d'images ou «Watermarking »	162
7.2	Compression par ondelettes	164
7.3	Inpainting	169
7.3.1	Méthodes variationnelles	170
7.3.2	Régularisation $L^2$	171
7.3.3	Régularisation de Sobolev	172
7.3.4	Régularisation par variation totale	173
<b>A</b>	<b>Quelques outils mathématiques</b>	<b>177</b>
A.1	Analyse de Fourier	177
A.1.1	Séries de Fourier d'un signal périodique 1D	177
A.1.2	La transformation de Fourier discrète (DFT) et la FFT	178
A.1.3	La transformation de Fourier	179
A.2	Ondelettes	182
A.2.1	Définition des ondelettes -1D	182
A.2.2	Analyse multi-résolution dans $L^2(\mathbb{R})$	183
A.2.3	Algorithme rapide de décomposition en ondelettes - FWT	185
A.2.4	Ondelettes 2D	187
A.2.5	Transformée en Ondelettes 2D directionnelle	188
A.2.6	Transformée en Ondelette isotrope	189



A.2.7	Décomposition d'une fonction sur une base d'ondelettes 2D - AMR 2D [63] .....	189
A.3	Optimisation dans les espaces de Banach .....	191
A.3.1	Éléments d'analyse fonctionnelle .....	191
A.3.2	Théorème de compacité .....	194
A.3.3	Gâteaux-différentiabilité des fonctionnelles convexes ...	195
A.3.4	Minimisation dans un Banach réflexif .....	196
A.3.5	Exemple : Projection sur un convexe fermé .....	197
A.4	Analyse convexe et analyse non lisse .....	198
A.4.1	Théorème de Hahn-Banach .....	198
A.4.2	Sous-différentiel .....	199
A.4.3	Application à l'indicatrice d'un ensemble .....	200
A.4.4	Lien avec le sous-différentiel .....	205
A.5	Espaces de Sobolev .....	206
A.6	L'espace des fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$ .....	207
A.6.1	Généralités .....	207
A.6.2	Approximation et compacité .....	210
A.7	Géométrie des courbes planes .....	212
A.7.1	Abscisse curviligne - longueur .....	212
A.7.2	Étude géométrique locale d'une courbe paramétrée ....	215
<b>B</b>	<b>Récapitulatif des différents procédés de traitement</b> .....	217
B.1	Traitements ponctuels - Chapitre 2 .....	218
B.2	Débruitage - Chapitres 3, 4 et 6 .....	219
B.3	Défloutage - Chapitres 3 et 4 .....	223
B.4	Segmentation des contours - Chapitres 3, 5 et 6 .....	226
B.4.1	Filtres passe-haut, spatiaux et fréquentiels .....	226
B.4.2	Filtres différentiels p. 49 .....	226
B.4.3	Détecteur de Canny p.100 .....	229
B.4.4	Méthode variationnelle de Mumford-Shah p.123 .....	229
B.4.5	Opérateurs morphologiques .....	230
B.5	Segmentation en régions .....	230
	<b>Littérature</b> .....	233
	<b>Index</b> .....	239

# Liste des figures

1.1	Types de représentation d'une image .....	2
1.2	Pixels et niveaux de gris .....	4
1.3	Échantillonnage .....	6
1.4	Quantification .....	6
1.5	Échantillonnage et quantification .....	6
1.6	Apparition de fréquences parasites dans le cas du sous-échantillonnage .....	7
1.7	Phénomène d'aliasing .....	7
1.8	Système visuel humain : l'œil <sup>1</sup> .....	8
1.9	Système visuel humain : transmission cérébrale .....	9
1.10	Principe d'un appareil photographique <sup>2</sup> .....	10
1.11	Principe d'un capteur <sup>3</sup> .....	12
1.12	Principe d'un numériseur <sup>4</sup> .....	12
1.13	Images radiographiques .....	14
1.14	Principe de la tomographie .....	15
1.15	Images en tomographie X .....	16
1.16	Principe de l'échographie .....	16
1.17	Image échographique .....	17
1.18	Images IRM .....	18
1.19	Dispositif et images MEG <sup>5</sup> .....	18
1.20	Tomographie par émission de positons .....	19
1.21	Image de rétine par OCT .....	20
1.22	Images d'un rein par différentes techniques .....	21
1.23	Différentes images « scientifiques » .....	22
1.24	Image aérienne ou satellite .....	22
1.25	Image SAR (Synthetic Aperture Radar) .....	23
2.1	Hibiscus et son histogramme .....	26
2.2	Deux images différentes peuvent avoir le même histogramme ..	26
2.3	Recadrage : Original (gauche) et image recadrée avec $a = 30$ , $b = 200$ .....	27

2.4	Fonction de rehaussement de contraste : dilatation de la dynamique des zones sombres (à gauche) et des zones claires (à droite) . . . . .	27
2.5	Rehaussement de contraste . . . . .	28
2.6	Fonction idéale d'égalisation d'un histogramme . . . . .	28
2.7	Egalisation d'histogramme . . . . .	29
2.8	Fonctions de seuillage et « fenêtre d'intensité » . . . . .	30
2.9	Seuillages . . . . .	30
3.1	Hautes et basses fréquences d'une image . . . . .	32
3.2	Exemples de bruits . . . . .	36
3.3	Filtres passe-bas et passe-haut . . . . .	38
3.4	Convolution locale . . . . .	39
3.5	Réflexion d'une image par rapport à ses bords. Ici $(d_1 - 1)/2 = (d_2 - 1)/2 := d$ et la taille de l'image et $n_1 \times n_2$ . . . . .	40
3.6	Effet d'un filtre de moyenne. . . . .	42
3.7	Effet de lissage . . . . .	43
3.8	Fonction gaussienne (2D). . . . .	43
3.9	Fonction de transfert <i>idéale</i> . . . . .	45
3.10	Application d'un créneau « idéal » ( $\delta_c \simeq 15\%$ de la taille de l'image) : on voit les ondulations dues à l'effet Gibbs. . . . .	45
3.11	Zoom sur le coin supérieur droit de la figure précédente : on voit les ondulations et un flou très important . . . . .	46
3.12	Fonction de transfert de Butterworth ( $\delta_c = 0.2, n = 5$ ) - (à gauche la fonction de transfert idéale . . . . .	46
3.13	Fonction de transfert du filtre passe-haut idéal avec la norme euclidienne . . . . .	47
3.14	Fonction de transfert du filtre passe-haut de Butterworth ( $\delta_c = 0.2, n = 5$ ) . . . . .	47
3.15	Filtrage passe-haut avec un filtre de Butterworth ( $n = 2$ et $\delta_c \simeq 0.1 * \text{taille de l'image}$ ) sur une image non bruitée (l'image est recadrée pour l'affichage - voir chapitre 2) . . . . .	48
3.16	Fonction de transfert d'un filtre passe-bande idéal. . . . .	49
3.17	Exemple d'images constantes par morceaux . . . . .	49
3.18	Exemple d'images texturées. . . . .	50
3.19	Valeur absolue des gradients et des gradients de Sobel (après passage en négatif puis contraste avec la fonction <code>imadjust</code> de MATLAB ) . . . . .	53
3.20	Gradients de Robinson (valeur absolue contrastée) dans 3 directions différentes (voir tableau 3.4) . . . . .	55
3.21	Valeur absolue du laplacien (avec rehaussement de contraste) . . . . .	56
3.22	Filtrage par EDP de la chaleur avec pas de temps $dt = 0.2$ et 10 itérations . . . . .	59
3.23	Déconvolution par équation de la chaleur inverse : $dt = 0.5$ . . . . .	60
3.24	Déconvolution par équation de la chaleur inverse : $dt = 0.5$ . . . . .	61

3.25	Déconvolution par algorithme de Van Cittert : $h$ est un masque gaussien de taille 9 et d'écart-type $\sigma = 4$ (connu) . . . .	62
4.1	Image bruitée par un bruit « Poivre et Sel » . . . . .	63
4.2	Comparaison des filtres médian et moyenne. . . . .	64
4.3	Filtrage par EDP de la chaleur avec pas de temps $dt = 0.2$ et 10 itérations et modèle de Peronna-Malik avec $dt = 0.3$ , $\alpha = 1$ et 10 itérations . . . . .	66
4.4	Image test originale et image lissée . . . . .	70
4.5	Régularisation $\ x\ $ versus $\ x\ ^2$ . . . . .	71
4.6	Original et Image bruitée ( $\sigma = 0.2$ ) . . . . .	82
4.7	Filtrage ROF : sensibilité au paramètre $\varepsilon$ (Algorithme de Chambolle-Pock avec $\tau = \sigma = 1/\sqrt{8}$ ) . . . . .	82
4.8	Analyse multi-résolution 2D . . . . .	83
4.9	Décomposition multi-résolution sur différentes bases d'ondelettes - Figures réalisées avec WaveLab [95] - (Voir aussi Mallat [63]) . . . . .	84
4.10	Fonctions de seuillage « dur » (à gauche) et « doux » (à droite)	85
4.11	Débruitage pour une image bruitée avec $\sigma \simeq 50$ (Figure 4.6) - Figures réalisées avec WaveLab [95] . . . . .	86
4.12	Déconvolution par filtre de Wiener d'une image floutée . Le filtre utilise un masque gaussien de taille 7 et d'écart-type 40 et $\hat{q} = 0.1$ . . . . .	89
4.13	Déconvolution par filtre de Wiener d'une image floutée et bruitée, même masque et $\hat{q} = 1$ . . . . .	89
4.14	Déconvolution par la méthode de Richardson-Lucy aveugle. L'image a été floutée par un filtre gaussien de taille 15 et d'écart-type 45. La méthode a été initialisée avec un masque gaussien de taille 9 et d'écart-type 20 . . . . .	92
4.15	Filtrage ROF généralisé sur une image floutée par un masque gaussien de taille 15 et d'écart-type 45 et bruitée par un bruit additif gaussien d'écart type 15. On a utilisé l'algorithme de Chambolle-Pock avec $\sigma_0 = \tau_0 = 1/\sqrt{8}$ , $\gamma = 1/\varepsilon$ . . . . .	95
5.1	Segmentation avec un filtre de Sobel . . . . .	98
5.2	Segmentation avec un Laplacien 8, p. 55 . . . . .	99
5.3	Segmentation : filtre passe-haut avec coupure à 20% de la taille	99
5.4	Détection de contours par Marr-Hildrett en fonction des seuils (le laplacien et les gradients ont été normalisés) . . . . .	100
5.5	Segmentation : détecteur de Canny . . . . .	102
5.6	Principe de la transformation de Hough . . . . .	104
5.7	Transformation de Hough : paramétrisation $(\rho, \theta)$ . . . . .	105
5.8	Transformation de Hough : quadrillage . . . . .	106
5.9	Transformation de Hough : exemple . . . . .	107
5.10	Transformation de Hough des données du tableau . . . . .	108

5.11	Transformation de Hough d'une image binaire	109
5.12	Orientation d'une courbe fermée	116
5.13	Paramétrisation de la courbe	117
5.14	Propagation de front le long de la direction normale	118
5.15	Principe de la méthode « Level set » (Sethian [87])	119
5.16	La méthode des lignes de niveaux autorise les changements de topologie (Source WIKIPEDIA)	120
5.17	Segmentation par contours actifs (d'après [58]).	123
5.18	Segmentation par le modèle Mumford-Shah :	
	$\alpha = \beta = 1, \varepsilon = 10^{-3}$	125
5.19	Sensibilité à $\beta$ avec $\varepsilon = 10^{-3}, \alpha = 1$ .	126
5.20	Sensibilité à $\varepsilon$ avec $\beta = 1, \alpha = 1$ .	126
5.21	Seuillage par hystérésis	127
5.22	Segmentation par seuillage d'histogramme	129
5.23	Segmentation par <i>K-means</i>	131
5.24	Segmentation par croissance de régions	132
5.25	Quad Tree	133
5.26	Histogramme de l'hibiscus (en pointillé) et décomposition en gaussiennes (en trait plein)	135
5.27	Approximations de la mesure de Dirac et de la fonction de Heaviside	136
6.1	Image test (860 x 780 pixels)	138
6.2	Principe de la dilatation et de l'érosion d'un ensemble	138
6.3	Dilatation avec différents éléments structurants $B$ : en bleu (gris) l'image originale $X$ , en noir la différence $D_B(X) - X$ .	139
6.4	Erosion avec différents éléments structurants $B$ : en noir l'image érodée $E_B(X)$ , en bleu (gris) $X - E_B(X)$ .	141
6.5	Dilatation et érosion avec $B$ disque de rayon 15 pixels.	141
6.6	Les opérations de dilatation et d'érosion ne sont pas commutatives - Exemple avec $B$ disque de rayon 15 pixels.	142
6.7	Squelettisation	143
6.8	Dilatation avec un disque de rayon $R$ .	145
6.9	Érosion avec un disque de rayon $R$ .	145
6.10	Gradients morphologiques	146
6.11	Ouverture $\gamma$ avec un disque de rayon $R$ .	147
6.12	Fermeture $\varphi$ avec un disque de rayon $R$ .	148
6.13	Illustration de l'opérateur <i>chapeau haut de forme</i> avec un disque de rayon 5.	149
6.14	Transformation <i>chapeau haut de forme</i> avec un disque de rayon $R$ .	150
6.15	Image test.	151
6.16	Débruitage avec des filtres alternés séquentiels - $B_i$ est un disque de rayon $R_i = i$ (pixels)	152

6.17 Bassins versants et ligne de partage des eaux (Source : Antoine Manzanera, Cours de Morphologie mathématique, Cours ENSTA- UMPC 2005 - <a href="http://www.ensta-paristech.fr/~manzaner/Cours/IAD/TERI_MorphoMath.eps">www.ensta-paristech.fr/~manzaner/Cours/IAD/TERI_MorphoMath.eps</a> )	153
6.18 Algorithme d'inondation (Source : Benoit Naegel, Introduction à Morphologie mathématique, Ecole des Mines de Nancy - <a href="http://www.banque-pdf.fr/fr_benoit-naegel.html">http://www.banque-pdf.fr/fr_benoit-naegel.html</a> )	154
6.19 Segmentation par LPE	155
7.1 Bits faibles et forts dans un octet	158
7.2 Exemple d'image cachée dans une autre (les tailles sont volontairement différentes)	160
7.3 Différence entre l'image message et l'image cachée récupérée	161
7.4 Principe du tatouage d'images	162
7.5 Principe de la compression JPEG 2000 - Source <a href="http://fr.wikipedia.org/wiki/JPEG_2000">http://fr.wikipedia.org/wiki/JPEG_2000</a>	165
7.6 Décomposition multi-résolution sur la base de Haar	166
7.7 Compression d'un signal 1D - taux de compression 78% - Base <i>Daubechies 8</i>	167
7.8 Distribution des 5% coefficients gardés après seuillage.	168
7.9 Compression à 95% avec la base de <i>Haar</i>	168
7.10 Compression avec les bases <i>Daubechies 8</i> et <i>Haar</i>	169
7.11 Image à reconstruire et masque	170
7.12 Restauration avec régularisation de Sobolev - $\alpha = 0.2$	173
7.13 Restauration avec régularisation TV -200 itérations	175
7.14 Comparaison des restaurations Sobolev et TV	176
1.1 Ondelette	182
1.2 Stockage des coefficients d'ondelettes en 2D	191
1.3 Décomposition multi-résolution sur la base de Haar	191
2.1 Images tests	217
2.2 Original et négatif	218
2.3 Éclaircissement et assombrissement	218
2.4 Recadrage et contraste p. 26	218
2.5 Égalisation d'histogramme p. 28	219
2.6 Seuillage et binarisation p. 29	219
2.7 Filtres linéaires (spatiaux) passe-bas p. 38	219
2.8 Filtres linéaires (fréquentiels) passe-bas p. 44.	220
2.9 Filtrage par EDP - p. 65.	220
2.10 Débruitage par ondelettes - chapitre 4 - p. 83	221
2.11 Filtrage ROF - Chapitre 4 p. 71.	221
2.12 Filtre médian pour un bruit « poivre et sel » p. 63.	222
2.13 Filtrage morphologique p. 150.	222

2.14 Filtrage morphologique : filtres alternés séquentiels - $B_i$ est un disque de rayon $R_i = i$ (pixels) . . . . .	222
2.15 Déconvolution par équation de la chaleur inverse p. 59 . . . . .	223
2.16 Déconvolution par algorithme de Van Cittert : $h$ est un masque gaussien de taille 9 et d'écart-type $\sigma = 4$ (connu) p. 61	223
2.17 Déconvolution par filtre de Wiener d'une image floutée et d'une image floutée et bruitée - $Q = 0.1$ p. 87 . . . . .	224
2.18 Déconvolution par la méthode de Richardson-Lucy aveugle. L'image a été floutée par un filtre gaussien de taille 15 et d'écart-type 45. La méthode a été initialisée avec un masque gaussien de taille 9 et d'écart-type 20 p. 91 . . . . .	224
2.19 Filtrage ROF généralisé sur une image floutée par un masque gaussien de taille 15 et d'écart-type 45 et bruitée par un bruit additif gaussien d'écart type 15. On a utilisé l'algorithme de Chambolle-Pock avec $\sigma_0 = \tau_0 = 1/\sqrt{8}$ , $\gamma = 1/\varepsilon$ p. 225 . . . . .	225
2.20 Segmentation : filtre passe-haut . . . . .	226
2.21 Gradients de Robinson dans 3 directions différentes p. 55 . . . . .	226
2.22 Valeur absolue des gradients et des gradients de Sobel p.53 . . . . .	227
2.23 Valeur absolue du laplacien p. 56 . . . . .	228
2.24 Détection de contours par Hildrett-Marr p.99 . . . . .	228
2.25 Segmentation : détecteur de Canny . . . . .	229
2.26 Segmentation par le modèle Mumford-Shah - p.123 . . . . .	229
2.27 Opérateur <i>top-hat</i> avec un disque de rayon 5 - p. 149 . . . . .	230
2.28 Segmentation par seuillage d'histogramme p. 128. . . . .	230
2.29 Segmentation par K-means - p. 129. . . . .	231
2.30 Segmentation par croissance de régions - p. 131 . . . . .	231
2.31 Ligne de partage des eaux - p. 153 . . . . .	232

# Liste des tables

- 3.1 Représentation matricielle du filtre en  $(x, y) - d_1 = d_2 = 3$  . . . 40
- 3.2 Filtres de moyenne  $3 \times 3$  et  $5 \times 5$  respectivement . . . . . 41
- 3.3 Masques des gradients par rapport à  $x$  (gauche) et  $y$  (droite) . 52
- 3.4 Différents types de masques pour le gradient, sa norme et sa direction . . . . . 54
  
- 7.1 Principe de la méthode (Bits de poids faible) . . . . . 159
- 7.2 Principe de l'algorithme permettant de cacher une image dans une seconde image : on remplace la 4 bits de poids faible de la première image par les 4 bits de poids fort de la deuxième. . 159