

---

# Springer-Lehrbuch

---

Erhard Cramer · Udo Kamps

# Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Ein Skript für Studierende der Informatik,  
der Ingenieur- und  
Wirtschaftswissenschaften

3., überarbeitete Auflage

 Springer Spektrum

Erhard Cramer  
Udo Kamps  
Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik  
RWTH Aachen  
Aachen, Deutschland

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-662-43972-2

ISBN 978-3-662-43973-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-43973-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, 2008, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer-spektrum.de](http://www.springer-spektrum.de)

---

## Vorwort zur 1. Auflage

Grundkenntnisse der Statistik sind in unserer von Daten geprägten Zeit von besonderer Bedeutung. In vielen Bereichen von Wirtschaft, Wissenschaft, Verwaltung, Gesellschaft und Politik werden Informationen aus Daten gewonnen, die empirischen Studien, Datenbasen, Erhebungen oder Experimenten entstammen. Informationen werden in quantitativer Weise verbreitet, Ergebnisse von Datenanalysen werden präsentiert und illustriert. Zur Bewertung der statistischen Ergebnisse wie auch zum Verständnis stochastischer Modelle ist ein Basiswissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung erforderlich.

In zahlreichen Studiengängen ist daher eine einführende Veranstaltung in die Denkweisen, Methoden und Verfahren der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung ein wichtiger Baustein der Ausbildung.

Verfahren der Beschreibenden (oder Deskriptiven) Statistik dienen der Analyse und Beschreibung von Daten, dem Aufdecken von darin enthaltenen Strukturen und Informationen sowie der Darstellung von Daten derart, dass die wesentlichen Erkenntnisse deutlich werden. Für zufallsabhängige Vorgänge oder komplexe Situationen, in denen eine deterministische Beschreibung nicht möglich ist, werden in den unterschiedlichsten Anwendungsbereichen stochastische Modelle benötigt; die Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert dazu, wie auch zur Schließenden Statistik, die theoretischen Grundlagen. In der Schließenden (oder Induktiven) Statistik wird das methodische Instrumentarium bereitgestellt, Schlussfolgerungen aufgrund von Daten zu begründen, interessierende Größen zu schätzen, Hypothesen zu stützen beziehungsweise zu verwerfen sowie die resultierenden Aussagen zu bewerten.

Das vorliegende Buch ist als begleitendes Skript zu einführenden Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Studierende der Informatik und der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, jedoch nicht als ein eigenständiges Lehrbuch zu den behandelten Gebieten Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Grundlagen der stochastischen Modellierung sowie Schließende Statistik konzipiert. Eigenheiten des Textes sind in dessen Verwendung für Studierende verschiedener Fachrichtungen mit unterschiedlichen mathematischen Voraussetzungen begründet. Die Zusammenstellung der Themen in diesem Skript

basiert auf inhaltlichen Abstimmungen mit den für die verschiedenen Bachelor-Studiengänge zuständigen Fachbereichen an der RWTH Aachen und ist konsistent mit den Modulbeschreibungen der entsprechenden Veranstaltungen. Themen einzelner Abschnitte sind nicht für alle Zielgruppen vorgesehen und werden daher in der jeweiligen Veranstaltung nicht behandelt. Ferner erfordert die Ausrichtung des Textes in der Darstellung gewisse Einschränkungen in der mathematischen Exaktheit. Mit dem Ziel einer komprimierten Darstellung der wesentlichen Inhalte der Vorlesungen werden – bis auf das erste Kapitel zur Beschreibenden Statistik – nur knappe Erläuterungen gegeben; es sind nur wenige Beispiele enthalten, nur ausgewählte Aussagen werden nachgewiesen, und es werden keine Aufgaben angeboten. Zielgruppenorientierte Motivationen, Beispiele und Aufgaben sind Bestandteil der jeweiligen Veranstaltungen. Für eine vertiefte Beschäftigung mit den genannten Gebieten oder im Selbststudium sollten weitere Bücher hinzu gezogen werden. Eine Auswahl ist im Literaturverzeichnis angegeben. Die Inhalte zur Beschreibenden Statistik sind dem ausführlichen Lehrbuch Burkschat, Cramer und Kamps (2012) auszugsweise entnommen. Dort können diese zusätzlich anhand einer Vielzahl von detailliert ausgeführten Beispielen nachvollzogen werden. Die Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, Modellierung und Schließenden Statistik basieren auf Vorlesungen der Autoren und auf der Formelsammlung „Statistik griffbereit“. Einflüsse aus den im Literaturverzeichnis genannten Büchern und sonstigen Quellen sind natürlich vorhanden. Parallelen zu anderen einführenden Texten sind nicht beabsichtigt, oft jedoch unvermeidbar; wir bitten diese gegebenenfalls nachzusehen.

An der Entstehung dieses Skripts haben auch andere mitgewirkt, denen wir für ihre Unterstützung herzlich danken. Ein besonderer Dank gilt Frau Birgit Tegguer für das sehr sorgfältige Schreiben und Korrigieren von Teilen des Manuskripts. Frau Lilith Braun danken wir für die gute Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag.

Liebe Leserin, lieber Leser, Ihre Meinung und Kritik, Ihre Anregungen zu Verbesserungen und Hinweise auf Unstimmigkeiten sind uns wichtig! Bitte teilen Sie uns diese unter [GWS@stochastik.rwth-aachen.de](mailto:GWS@stochastik.rwth-aachen.de) mit. Wir wünschen Ihnen ein erfolgreiches Arbeiten mit diesem Skript.

Erhard Cramer, Udo Kamps  
Aachen, Januar 2007

## Vorwort zur 3. Auflage

In der dritten Auflage haben wir einige Ergänzungen eingefügt sowie Korrekturen und Aktualisierungen vorgenommen. Auswahl und Aufbau der Inhalte haben sich in Lehrveranstaltungen bewährt und wurden daher nicht verändert. Wir bedanken uns bei allen, die uns Hinweise auf Unstimmigkeiten mitgeteilt haben.

Erhard Cramer, Udo Kamps  
Aachen, Mai 2014

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>A</b>	<b>Beschreibende Statistik</b>	1
A 1	Einführung und Grundbegriffe	1
A 1.1	Grundgesamtheit und Stichprobe	2
A 1.2	Merkmale und Merkmalsausprägungen	3
A 1.3	Skalen und Merkmalstypen	5
A 1.4	Mehrdimensionale Merkmale	14
A 2	Tabellarische und graphische Darstellungen	15
A 2.1	Häufigkeiten	16
A 2.2	Empirische Verteilungsfunktion	17
A 2.3	Diagrammtypen	20
A 3	Lage- und Streuungsmaße	23
A 3.1	Lagemaße für nominale und ordinale Daten	23
A 3.2	Lagemaße für metrische Daten	26
A 3.3	Streuungsmaße	33
A 3.4	Lage- und Streuungsmaße bei linearer Transformation	39
A 3.5	Box-Plots	40
A 4	Klassierte Daten und Histogramm	42
A 4.1	Klassenbildung	42
A 4.2	Histogramm	44
A 5	Konzentrationsmessung	51
A 5.1	Lorenz-Kurve	53
A 5.2	Konzentrationsmaße	57
A 6	Verhältnis- und Indexzahlen	65
A 6.1	Gliederungs- und Beziehungszahlen	66
A 6.2	Mess- und Indexzahlen	70

VIII Inhaltsverzeichnis

A 6.3	Preis- und Mengenindizes	77
A 7	Zusammenhangsmaße	91
A 7.1	Nominale Merkmale	92
A 7.2	Metrische Merkmale	105
A 7.3	Ordinale Merkmale	113
A 8	Regressionsanalyse	117
A 8.1	Methode der kleinsten Quadrate	119
A 8.2	Lineare Regression	120
A 8.3	Bewertung der Anpassung	128
A 9	Zeitreihenanalyse	137
A 9.1	Zeitreihenzerlegung	138
A 9.2	Zeitreihen ohne Saison	140
A 9.3	Zeitreihen mit Saison	146
<b>B</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>153</b>
B 1	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	154
B 2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	164
B 3	Wahrscheinlichkeitsmaße mit Riemann-Dichten	166
B 4	Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen	173
B 5	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	178
B 6	Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen	181
<b>C</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>187</b>
C 1	Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsmaße	187
C 2	Verteilungsfunktion und Quantilfunktion	194
C 3	Mehrdimensionale Zufallsvariablen und Verteilungen	199
C 4	Transformationen von Zufallsvariablen	207
C 5	Erwartungswerte, Varianz, Kovarianz und Korrelation	210
C 6	Erzeugende Funktionen	222
C 7	Bedingte Verteilungen und bedingte Erwartungswerte	226
C 8	Grenzwertsätze	229
<b>D</b>	<b>Schließende Statistik</b>	<b>235</b>
D 1	Problemstellungen der Schließenden Statistik	235
D 1.1	Grundbegriffe	236
D 1.2	Stichprobenmodelle	240
D 2	Punktschätzungen	241

D 2.1	Parameterschätzungen .....	241
D 2.2	Schätzung der Verteilungsfunktion .....	248
D 3	Maximum-Likelihood-Schätzung .....	249
D 4	Konfidenzintervalle .....	255
D 4.1	Exponentialverteilung .....	256
D 4.2	Binomialverteilung .....	257
D 5	Schätzungen bei Normalverteilung .....	260
D 5.1	Punktschätzung .....	261
D 5.2	Konfidenzintervalle .....	263
D 6	Statistische Testverfahren .....	266
D 6.1	Einführung in Hypothesentests .....	266
D 6.2	Tests bei Normalverteilungsannahme .....	273
D 6.3	Binomialtests .....	294
D 6.4	Weitere Testverfahren .....	300
D 7	Lineares Regressionsmodell .....	307
D 7.1	Punktschätzungen .....	308
D 7.2	Konfidenzintervalle .....	312
D 7.3	Hypothesentests .....	314
D 8	Elemente der Bayes-Statistik .....	314
<b>E</b>	<b>Tabellen</b> .....	321
E 1	Ausgewählte Quantile der Standardnormalverteilung .....	321
E 2	Quantile der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden .....	322
E 3	Quantile der $\chi^2$ -Verteilung mit n Freiheitsgraden .....	323
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	325
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	327