

Einleitung in die Mengenlehre

Eine gemeinverständliche Einführung
in das Reich der unendlichen Größen

von

Dr. Adolf Fraenkel

Privatdozent an der Universität Marburg

Mit 10 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1919

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten.**

ISBN 978-3-662-42209-0

ISBN 978-3-662-42478-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-42478-0

Vorwort

Das vorliegende Büchlein ist im Feld entstanden und aus dem Feld in Druck gegeben worden; die Anregung zu ihm verdanke ich Unterhaltungen, in denen ich Kriegskameraden (Nichtmathematikern) gelegentlich öde Stunden durch Einführung in Gedankengänge der Mengenlehre verkürzen konnte.

Wenn auch diese Entstehung in der Anlage der Schrift — namentlich im Zurücktreten der Literaturangaben — noch erkennbar sein mag, so wird dadurch doch der beabsichtigte Zweck nicht beeinträchtigt: eine kurze Einführung in eine der gewaltigsten Errungenschaften des menschlichen Geistes, in die Grundzüge der abstrakten Mengenlehre, zu bieten, verständlich für jedermann, der *Interesse* nimmt an der mathematischen Begründung des Unendlichgroßen und daher auch so viel *Geduld* mitbringt, um sich allmählich in etwas abstrakte Gedankengänge hineinzufinden. Vorkenntnisse mathematischer oder philosophischer Art sind hierzu in keiner Weise erforderlich.

Sollte die Schrift hiernach auch außerhalb mathematischer und philosophischer Kreise (z. B. auch unter interessierten Primanern) einige Leser finden, so dürften für solche vielleicht ein paar Ratschläge nützlich sein: Die ersten Abschnitte sind reichlich breit und wohl für jedermann ohne weiteres verständlich gehalten; ihre Lektüre mag dem Leser gleichzeitig eine gewisse Übung im abstrakten Denken verleihen, die ihm in den folgenden Teilen zustatten kommen wird. Dennoch und trotz der Beispiele, die von Anfang an zahlreich in die Überlegungen verstreut sind, wird sich der Nichtmathematiker gar manche Gedankengänge der späteren Abschnitte erst dadurch so recht zum geistigen Eigentum machen, daß er die betreffenden Stellen wiederholt durchliest und in sich verarbeitet. Will er von seinem

Ausflug in das Reich der unendlichen Größen nicht nur Nutzen, sondern auch Genuß haben, so darf er sich diese Mühe nicht verdrießen lassen (also sich nicht etwa damit begnügen, Satz für Satz festzustellen, daß die Entwicklung logisch einwandfrei ist und also wohl zutreffen wird). Zur Erleichterung sind einige verhältnismäßig schwierige und zum Verständnis des Nachfolgenden nicht unentbehrliche Stellen durch kleineren Druck gekennzeichnet; sie werden von dem weniger geübten Leser mit Vorteil bei der erstmaligen Lektüre überschlagen.

Andererseits hoffe ich auch dem Mathematiker — dem Studierenden sowohl wie dem Schulmann, der sich an der Universität nicht oder nur flüchtig mit Mengenlehre beschäftigt hat — sowie dem an dem Problem des Aktual-Unendlichgroßen interessierten Philosophen eine brauchbare Einführung vorzulegen. Gemäß dem skizzierten Zweck ist allerdings in den Vordergrund das Ziel gerückt, die Möglichkeit der einwandfreien Einführung „unendlicher Größen“ und ihrer vernünftigen mathematischen Verwendung in helles Licht zu setzen; die mathematischen *Anwendungen* treten demgegenüber ganz zurück, namentlich wird die Theorie der Punktmengen nur flüchtig (im § 10) gestreift. Wer vom Standpunkt des Mathematikers aus das mengentheoretische Gebäude gründlich kennenlernen will, darf sich daher mit dem vorliegenden Büchlein nicht begnügen, sondern muß noch zu einer der am Schluß angeführten Schriften (am besten zu Herrn HAUSDORFFS „Grundzügen“) greifen.

Dem Wunsch, möglichst leichte Verständlichkeit zu erzielen, durfte die mathematische Strenge nicht geopfert werden, wenn die Schrift für Mathematiker und Philosophen wirklichen Wert haben sollte. *Grundsätzliche* Schwierigkeiten werden daher nirgends verschleiert, sondern entweder aufgelöst oder es werden vereinzelt zurückbleibende Lücken ausdrücklich und unter weiterer Verweisung als solche bezeichnet. Im übrigen habe ich hin und wieder (namentlich an manchen Stellen der §§ 7 und 11) — und zwar stets unter Kennzeichnung dieses Sachverhalts — manche Beweise der Beschränkung des Umfangs zuliebe unterdrückt oder mich bei einzelnen Punkten mit Andeutung des Gedankenganges begnügt. Dem im übrigen beibehaltenen Grundsatz der Strenge entspricht es, wenn den logischen Paradoxien und namentlich der Axiomatik eine verhältnismäßig eingehende Behandlung

gewidmet wird¹⁾. Dabei habe ich eine gewisse Breite der Darstellung, dem Zweck der Schrift entsprechend, grundsätzlich nicht gescheut; ich verweise gegenüber der Forderung nach „Eleganz“ auf ein jüngst von Herrn EINSTEIN²⁾ angeführtes Wort BOLZMANNs: man solle die Eleganz Sache der Schneider und Schuster sein lassen.

Den Herren A. OSTROWSKI-Göttingen und G. WIARDA-Marburg danke ich für freundliche Hilfe und Ratschläge bei der Korrektur, ferner der SPRINGERschen Verlagshandlung für das während der Drucklegung geübte Entgegenkommen.

Marburg, im Januar 1919.

Adolf Fraenkel.

¹⁾ Infolge der Eigenart der Entstehung des Büchleins habe ich leider die unmittelbar vor und während des Kriegs erschienene Literatur, nämlich die Werke der Herren HAUSDORFF und CARATHÉODORY und die axiomatisch-philosophisch gerichteten Schriften von J. KÖNIG, WEYL und BROUWER, erst während der Drucklegung bzw. nach ihrer Beendigung einsehen können.

²⁾ Im Vorwort der Schrift: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Braunschweig 1917; Sammlung Vieweg, Heft 38).

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 1. Einleitung	1
§ 2. Begriff der Menge. Beispiele von Mengen	3
§ 3. Die Begriffe der Äquivalenz, der Teilmenge, der unendlichen Menge	9
§ 4. Abzählbare Mengen	17
§ 5. Das Kontinuum. Begriff der Kardinalzahl oder Mächtigkeit. Die Kardinalzahlen \aleph , c und \mathfrak{f}	30
§ 6. Die Größenordnung der Kardinalzahlen	46
§ 7. Die Addition und Multiplikation der Kardinalzahlen	55
§ 8. Die Potenzierung der Kardinalzahlen	73
§ 9. Geordnete Mengen. Ähnlichkeit und Ordnungstypus	78
§ 10. Lineare Punktmengen ¹⁾	93
§ 11. Wohlgeordnete Mengen. Die Wohlordnung und ihre Bedeutung	110
§ 12. Logische Paradoxien. Nochmals der Begriff der Menge	129
§ 13. Schluß	151
Literatur	154
Register	156

¹⁾ Dieser Paragraph kann ohne Beeinträchtigung des Verständnisses der nachfolgenden Teile überschlagen werden.