DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE †
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND IX

EINLEITUNG IN DIE MENGENLEHRE

VON

ADOLF FRAENKEL

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1928

EINLEITUNG IN DIE MENGENLEHRE

VON

DR. PHIL. ADOLF FRAENKEL
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT KIEL

DRITTE UMGEARBEITETE
UND STARK ERWEITERTE AUFLAGE

MIT 13 ABBILDUNGEN

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1928

ISBN 978-3-662-41971-7 ISBN 978-3-662-42029-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-42029-4

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1928.
Softcover reprint of the hardcover 3th edition 1928

DEM ANDENKEN AN

ERNST STEINITZ

DEN MENSCHEN UND
DEN FORSCHER

GESTORBEN IN KIEL AM 29. SEPTEMBER 1928

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Büchlein ist im Feld entstanden und aus dem Feld in Druck gegeben worden; die Anregung zu ihm verdanke ich Unterhaltungen, in denen ich Kriegskameraden (Nichtmathematikern) gelegentlich öde Stunden durch Einführung in Gedankengänge der Mengenlehre verkürzen konnte.

Wenn auch diese Entstehung in der Anlage der Schrift noch erkennbar sein mag, so wird dadurch doch der beabsichtigte Zweck nicht beeinträchtigt: eine kurze Einführung in eine der gewaltigsten Errungenschaften des menschlichen Geistes, in die Grundzüge der abstrakten Mengenlehre, zu bieten, verständlich für jedermann, der *Interesse* nimmt an der mathematischen Begründung des Unendlichgroßen und daher auch so viel *Geduld* mitbringt, um sich allmählich in etwas abstrakte Gedankengänge hineinzufinden. Vorkenntnisse mathematischer oder philosophischer Art sind hierzu in keiner Weise erforderlich . . .

. . . Dabei habe ich eine gewisse Breite der Darstellung, dem Zweck der Schrift entsprechend, grundsätzlich nicht gescheut; ich verweise gegenüber der Forderung nach „Eleganz" auf ein Wort Boltzmanns: man solle die Eleganz Sache der Schneider und Schuster sein lassen.

Marburg, im Januar 1919.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, die das seit Jahresfrist vergriffene Buch beim Publikum und bei der Kritik gefunden hat, veranlaßt mich die Anlage der Schrift im ganzen unverändert beizubehalten. Namentlich habe ich wiederum eine gelegentliche Breite, ja selbst vereinzelte Wiederholungen nicht gescheut; ich halte es im vorliegenden Fall für wichtiger, auch dem mathematisch weniger Geübten einen Einblick selbst in grundsätzlich oder sachlich *schwierige* Partien zu ermöglichen, als den Kenner durch äußerste Kürze und Eleganz zu erfreuen. Nur nach zwei Richtungen hin ist das Buch erheblicher erweitert worden.

Zunächst wurde in den §§ 1—11 die Darstellung in zahlreichen Punkten ausgestaltet, namentlich bei der Einführung grundsätzlich wichtiger Begriffe sowie an Stellen, wo in der ersten Auflage einzelne schwierigere Beweise unterdrückt oder nur skizziert worden waren, die nunmehr eine vollständige Ausführung erhielten. . . .

Die zweite wesentlichere Ausgestaltung betrifft die Behandlung der *prinzipiellen Fragen,* die mit der Grundlegung der Mengenlehre zusammenhängen und zum Teil das *Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie* berühren. . . .

Marburg, im Frühjahr 1923.

Vorwort zur dritten Auflage.

Daß auch die zweite Auflage des vorliegenden Buches bei der Kritik günstige Aufnahme gefunden hat und innerhalb dreier Jahre vergriffen war, muß ich wohl als eine Mahnung auffassen, Charakter und Anlage der Schrift nicht allzusehr zu verändern — so nahe dies wenigstens für die erste Hälfte gelegen hätte, die die abstrakte Mengenlehre im Sinne CANTORs behandelt. Hier habe ich mich damit begnügt, den Stoff in mäßigen Grenzen zu vermehren, die Darstellung straffer zu gliedern, Literaturangaben reichlicher einzustreuen und an die Mitarbeit und Selbstprüfung des Lesers sichtbar zu appellieren durch einfache Aufgaben am Schluß der einzelnen Paragraphen. Mit alledem erhalten die §§ 2—12 ein Gewand, das sich nicht mehr allzu weit unterscheidet von dem, wie es sonst bei mathematischen Lehrbüchern üblich ist. Allerdings habe ich die Breite im Anfang unverändert beibehalten; sie soll (und wird nach gemachten Erfahrungen) auch dem mathematisch völlig ungeübten Leser, wenn er nur zu intensiver Mitarbeit fähig und willens ist, es ermöglichen, ungeachtet der voll gewahrten Strenge der Darstellung selbst an die schwierigeren Fragen heranzukommen. — Dem Wunsch einer hochgeschätzten und temperamentvollen Rezensentin, den Abschnitt über Punktmengen erheblich auszugestalten (oder fortzulassen), konnte ich mich nicht entschließen nachzukommen; die Beispiele aus diesem Gebiet, dem es an vorzüglichen Darstellungen in deutscher Sprache nicht mangelt, sollen lediglich als Illustrationen zu vorangegangenen Abschnitten dienen und u. a. auch gewisse Betrachtungen CANTORs über *geordnete* Punktmengen, die inzwischen in den Hintergrund getreten sind, dem Leser vorführen.

Eine vollständige Umarbeitung hingegen, verbunden mit einer Verdoppelung des Umfangs, hat sich die zweite Hälfte (Kapitel IV und V) gefallen lassen müssen, die der Grundlegung der Mengenlehre und damit den Prinzipienfragen der Mathematik überhaupt gewidmet ist; also Fragen, die heute einen Mittelpunkt des Interesses und der Diskussion in weiterem als nur dem mathematischen Kreise bilden. In der Tat ist zu diesem in rascher Entwicklung befindlichen Gegenstand seit dem Erscheinen der zweiten Auflage eine wahre Flut von Veröffentlichungen von freilich sehr verschiedenem Werte erschienen.

Die Auseinandersetzung mit etwas älteren philosophischen Standpunkten zum Aktual-Unendlichen konnte als bereits überholt teils fortfallen, teils auf kurze Hinweise bei den einzelnen Begriffsbildungen beschränkt werden. Dagegen wurde die Schilderung des Intuitionismus in den Prägungen seiner verschiedenen Vertreter (die untereinander wohl nicht ganz so tief und grundsätzlich abweichen, als sie es selbst glauben) derart ausgestaltet, wie es den neuesten Originalarbeiten und der zunehmenden Klärung der Problemlage entspricht. Fernerhin glaubte ich dem gigantischen, wenn auch keineswegs endgültigen Werk der *Principia Mathematica*, das in Deutschland bisher nur in engem Kreise gewürdigt und noch weniger gekannt wird, eine Darstellung schuldig zu sein. Diese kann zwar weder in die Details eingehen noch die Grundfragen in dem vollen erforderlichen Ausmaß behandeln; sie hat das mir vorschwebende Ziel erreicht, wenn sie das Interesse des Lesers erweckt und ihm den — ebenso wie beim Intuitionismus nicht gerade bequemen — Zugang zu den Quellen merklich ebnet. Bei Niederschrift dieser Zeilen sind gerade die „Grundzüge der theoretischen Logik" von HILBERT und ACKERMANN erschienen, die wohl zum erstenmal einem breiteren deutschen Leserkreis viele tieferliegende Hauptgedanken der Logik RUSSELLS darlegen; auch *nach* dieser Schilderung, die andere Zwecke verfolgt, wird meine Skizze noch einem Bedürfnis entgegenkommen.

Das V. Kapitel gibt eine dem heutigen (keineswegs schon endgültigen) Stand entsprechende Darstellung der axiomatischen Mengenlehre in dem durch ZERMELO angebahnten Sinn, wobei die psychologisch-didaktische Begründung der Axiome, die wirkliche Herleitung der Theorie aus den Axiomen und die großen allgemeinen Probleme der axiomatischen Methode überhaupt gleichmäßig zu ihrem Rechte kommen. Auf Einzelheiten einzugehen ist möglichst vermieden worden, um so mehr als dafür mehrfach auf meine 1927 in der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" erschienene Schrift verwiesen werden kann. Dagegen glaubte ich dem Leser nicht nur Fertiges bieten, sondern ihn auch zu den am Rande der heutigen Forschung noch gähnenden Klüften und Abgründen heranführen zu sollen — selbst da, wo die offenen Fragen viel mehr philosophische oder weltanschauliche als eigentlich mathematische Züge tragen (wie z. B. auf S. 325—332). Daß die mathematische Forschung sich regelmäßig einer gedrängten, dogmatischen und unpsychologischen Darstellung befleißigt, die dem Studenten und selbst dem nach anderer Richtung spezialisierten Forscher das Eindringen in einem fast prohibitiven Ausmaß erschwert, hat neben gewissen inneren vor allem historische (z. B. das allzu suggestiv wirkende Vorbild von GAUSS) und äußere Gründe (Umfang der Zeitschriften).

Der Erfolg muß lehren, ob die völlige Abkehr von dieser Darstellungsart auch in den Schlußteilen des vorliegenden Buches es zuwege bringt, dem weniger Geübten das Verständnis selbst schwieriger Dinge zu erschließen und weiteren philosophischen Kreisen klarzumachen, welche Bedeutung (qualem et quantam) für sie die mathematische Grundlagenforschung besitzt — wie das zu meiner Freude mit der 2. Auflage vielfach gelungen ist.

Während es bei der Schilderung der gegensätzlichen Prinzipien und Schulen in der zweiten Hälfte des Buches mein Bestreben war, die äußerste Unparteilichkeit zu wahren und jede Richtung mit den ihr selbst gemäßen Argumenten zu begründen, glaubte ich dem Leser am Schluß ein kurzes persönliches Glaubensbekenntnis schuldig zu sein (Ende des § 18); daß dieses auch für mich schon morgen überholt oder modifiziert sein kann und für die Überzeugung des Lesers keineswegs maßgebend sein darf, sei auch an dieser Stelle betont für Leser, die sich etwa das *iurare in verba magistri* noch nicht in dem für den Mathematiker und Philosophen wünschenswerten Maße abgewöhnt haben.

Auf eine möglichst erschöpfende Zusammenstellung der neueren (namentlich auch der vielfach mit Schwierigkeiten beschafften aus ländischen) Literatur zu den behandelten Gegenständen der Grundlagenforschung habe ich besondere Sorgfalt verwandt; diese Mühe wird belohnt sein, wenn dadurch für jüngere Forscher die Inangriffnahme des einen oder anderen Problems angeregt und erleichtert wird. Die Lektüre des Buches selbst erfordert weder weitere Literatur noch überhaupt besondere Vorkenntnisse.

Für freundliche Hilfe bei der Korrektur und wertvolle Ratschläge zu einzelnen Gegenständen danke ich Frau Deutschbein-Marburg und den Herren Becker-Freiburg i. B., Bernays-Göttingen, Carnap-Wien, Kuratowski-Lemberg, Prüfer-Münster, Ramsey-Cambridge, Tarski-Warschau; ganz besonders aber den Herren Baer-Freiburg i. B. und Plessner-Marburg, die vollständige Korrekturen des Buches durchgesehen und es durch eine Fülle wichtiger Bemerkungen bereichert haben. Weiterhin gilt mein Dank der Verlagsbuchhandlung *Julius Springer* für ihr stets bewährtes Entgegenkommen, ferner den Freunden im In- und Ausland, die sich mit Fragen und Anregungen zur bisherigen Gestalt des Buches an mich gewandt haben, sowie Herrn cand. math. Strocka-Kiel, der die Herstellung des Namenverzeichnisses übernahm. Schließlich gehe das Buch diesmal nicht in die Welt ohne ein Wort des Gedenkens für Gerhard Hessenberg, den ausgezeichneten Menschen und Denker, dessen Arbeiten ich in wissenschaftlicher und didaktischer Hinsicht gleich viel verdanke.

Kiel, im Sommer 1928.

Adolf Fraenkel.

Inhaltsverzeichnis.

Drittes Kapitel.

Ordnungstypen und Ordnungszahlen.

Viertes Kapitel.

Erschütterungen der Grundlagen und ihre Folgen.

Fünftes Kapitel.

Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre. Die axiomatische Methode.