

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE †
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND IX
EINLEITUNG
IN DIE MENGENLEHRE
VON
ADOLF FRAENKEL



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1928

EINLEITUNG IN DIE MENGENLEHRE

VON

DR. PHIL. ADOLF FRAENKEL
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT KIEL

DRITTE UMGEARBEITETE
UND STARK ERWEITERTE AUFLAGE

MIT 13 ABBILDUNGEN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1928

**ALLE RECHTE, INSBESONDERE
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.**

ISBN 978-3-662-41971-7 ISBN 978-3-662-42029-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-42029-4

Copyright 1928 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1928.
Softcover reprint of the hardcover 3th edition 1928

DEM ANDENKEN AN
ERNST STEINITZ

DEN MENSCHEN UND
DEN FORSCHER

GESTORBEN IN KIEL AM 29. SEPTEMBER 1928

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Büchlein ist im Feld entstanden und aus dem Feld in Druck gegeben worden; die Anregung zu ihm verdanke ich Unterhaltungen, in denen ich Kriegskameraden (Nichtmathematikern) gelegentlich öde Stunden durch Einführung in Gedankengänge der Mengenlehre verkürzen konnte.

Wenn auch diese Entstehung in der Anlage der Schrift noch erkennbar sein mag, so wird dadurch doch der beabsichtigte Zweck nicht beeinträchtigt: eine kurze Einführung in eine der gewaltigsten Errungenschaften des menschlichen Geistes, in die Grundzüge der abstrakten Mengenlehre, zu bieten, verständlich für jedermann, der *Interesse* nimmt an der mathematischen Begründung des Unendlichgroßen und daher auch so viel *Geduld* mitbringt, um sich allmählich in etwas abstrakte Gedankengänge hineinzufinden. Vorkenntnisse mathematischer oder philosophischer Art sind hierzu in keiner Weise erforderlich . . .

. . . Dabei habe ich eine gewisse Breite der Darstellung, dem Zweck der Schrift entsprechend, grundsätzlich nicht gescheut; ich verweise gegenüber der Forderung nach „Eleganz“ auf ein Wort BOLTZMANNs: man solle die Eleganz Sache der Schneider und Schuster sein lassen.

Marburg, im Januar 1919.

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, die das seit Jahresfrist vergriffene Buch beim Publikum und bei der Kritik gefunden hat, veranlaßt mich die Anlage der Schrift im ganzen unverändert beizubehalten. Namentlich habe ich wiederum eine gelegentliche Breite, ja selbst vereinzelte Wiederholungen nicht gescheut; ich halte es im vorliegenden Fall für wichtiger, auch dem mathematisch weniger Geübten einen Einblick selbst in grundsätzlich oder sachlich *schwierige* Partien zu ermöglichen, als den Kenner durch äußerste Kürze und Eleganz zu erfreuen. Nur nach zwei Richtungen hin ist das Buch erheblicher erweitert worden.

Zunächst wurde in den §§ 1—11 die Darstellung in zahlreichen Punkten ausgestaltet, namentlich bei der Einführung grundsätzlich

wichtiger Begriffe sowie an Stellen, wo in der ersten Auflage einzelne schwierigere Beweise unterdrückt oder nur skizziert worden waren, die nunmehr eine vollständige Ausführung erhielten. . . .

Die zweite wesentlichere Ausgestaltung betrifft die Behandlung der *prinzipiellen Fragen*, die mit der Grundlegung der Mengenlehre zusammenhängen und zum Teil das *Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie* berühren. . . .

Marburg, im Frühjahr 1923.

Vorwort zur dritten Auflage.

Daß auch die zweite Auflage des vorliegenden Buches bei der Kritik günstige Aufnahme gefunden hat und innerhalb dreier Jahre vergriffen war, muß ich wohl als eine Mahnung auffassen, Charakter und Anlage der Schrift nicht allzusehr zu verändern — so nahe dies wenigstens für die erste Hälfte gelegen hätte, die die abstrakte Mengenlehre im Sinne CANTORS behandelt. Hier habe ich mich damit begnügt, den Stoff in mäßigen Grenzen zu vermehren, die Darstellung straffer zu gliedern, Literaturangaben reichlicher einzustreuen und an die Mitarbeit und Selbstprüfung des Lesers sichtbar zu appellieren durch einfache Aufgaben am Schluß der einzelnen Paragraphen. Mit alledem erhalten die §§ 2—12 ein Gewand, das sich nicht mehr allzu weit unterscheidet von dem, wie es sonst bei mathematischen Lehrbüchern üblich ist. Allerdings habe ich die Breite im Anfang unverändert beibehalten; sie soll (und wird nach gemachten Erfahrungen) auch dem mathematisch völlig ungeübten Leser, wenn er nur zu intensiver Mitarbeit fähig und willens ist, es ermöglichen, ungeachtet der voll gewährten Strenge der Darstellung selbst an die schwierigeren Fragen heranzukommen. — Dem Wunsch einer hochgeschätzten und temperamentvollen Rezensentin, den Abschnitt über Punktmengen erheblich auszugestalten (oder fortzulassen), konnte ich mich nicht entschließen nachzukommen; die Beispiele aus diesem Gebiet, dem es an vorzüglichen Darstellungen in deutscher Sprache nicht mangelt, sollen lediglich als Illustrationen zu vorangegangenen Abschnitten dienen und u. a. auch gewisse Betrachtungen CANTORS über *geordnete* Punktmengen, die inzwischen in den Hintergrund getreten sind, dem Leser vorführen.

Eine vollständige Umarbeitung hingegen, verbunden mit einer Verdoppelung des Umfangs, hat sich die zweite Hälfte (Kapitel IV und V) gefallen lassen müssen, die der Grundlegung der Mengenlehre und damit den Prinzipienfragen der Mathematik überhaupt gewidmet ist; also Fragen, die heute einen Mittelpunkt des Interesses und der Diskussion in weiterem als nur dem mathematischen Kreise bilden. In der Tat ist zu diesem in rascher Entwicklung befindlichen Gegenstand seit

dem Erscheinen der zweiten Auflage eine wahre Flut von Veröffentlichungen von freilich sehr verschiedenem Werte erschienen.

Die Auseinandersetzung mit etwas älteren philosophischen Standpunkten zum Aktual-Unendlichen konnte als bereits überholt teils fortfallen, teils auf kurze Hinweise bei den einzelnen Begriffsbildungen beschränkt werden. Dagegen wurde die Schilderung des Intuitionismus in den Prägungen seiner verschiedenen Vertreter (die untereinander wohl nicht ganz so tief und grundsätzlich abweichen, als sie es selbst glauben) derart ausgestaltet, wie es den neuesten Originalarbeiten und der zunehmenden Klärung der Problemlage entspricht. Fernerhin glaubte ich dem gigantischen, wenn auch keineswegs endgültigen Werk der *Principia Mathematica*, das in Deutschland bisher nur in engem Kreise gewürdigt und noch weniger gekannt wird, eine Darstellung schuldig zu sein. Diese kann zwar weder in die Details eingehen noch die Grundfragen in dem vollen erforderlichen Ausmaß behandeln; sie hat das mir vorschwebende Ziel erreicht, wenn sie das Interesse des Lesers erweckt und ihm den — ebenso wie beim Intuitionismus nicht gerade bequemen — Zugang zu den Quellen merklich ebnet. Bei Niederschrift dieser Zeilen sind gerade die „Grundzüge der theoretischen Logik“ von HILBERT und ACKERMANN erschienen, die wohl zum erstenmal einem breiteren deutschen Leserkreis viele tieferliegende Hauptgedanken der Logik RUSSELLS darlegen; auch *nach* dieser Schilderung, die andere Zwecke verfolgt, wird meine Skizze noch einem Bedürfnis entgegenkommen.

Das V. Kapitel gibt eine dem heutigen (keineswegs schon endgültigen) Stand entsprechende Darstellung der axiomatischen Mengenlehre in dem durch ZERMELO angebahnten Sinn, wobei die psychologisch-didaktische Begründung der Axiome, die wirkliche Herleitung der Theorie aus den Axiomen und die großen allgemeinen Probleme der axiomatischen Methode überhaupt gleichmäßig zu ihrem Rechte kommen. Auf Einzelheiten einzugehen ist möglichst vermieden worden, um so mehr als dafür mehrfach auf meine 1927 in der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese“ erschienene Schrift verwiesen werden kann. Dagegen glaubte ich dem Leser nicht nur Fertiges bieten, sondern ihn auch zu den am Rande der heutigen Forschung noch gähnenden Klüften und Abgründen heranzuführen zu sollen — selbst da, wo die offenen Fragen viel mehr philosophische oder weltanschauliche als eigentlich mathematische Züge tragen (wie z. B. auf S. 325—332). Daß die mathematische Forschung sich regelmäßig einer gedrängten, dogmatischen und unpsychologischen Darstellung befleißigt, die dem Studenten und selbst dem nach anderer Richtung spezialisierten Forscher das Eindringen in einem fast prohibitiven Ausmaß erschwert, hat neben gewissen inneren vor allem historische (z. B. das allzu suggestiv wirkende Vorbild von GAUSS) und äußere Gründe (Umfang der Zeitschriften).

Der Erfolg muß lehren, ob die völlige Abkehr von dieser Darstellungsart auch in den Schlußteilen des vorliegenden Buches es zuwege bringt, dem weniger Geübten das Verständnis selbst schwieriger Dinge zu erschließen und weiteren philosophischen Kreisen klarzumachen, welche Bedeutung (*qualem et quantam*) für sie die mathematische Grundlagenforschung besitzt — wie das zu meiner Freude mit der 2. Auflage vielfach gelungen ist.

Während es bei der Schilderung der gegensätzlichen Prinzipien und Schulen in der zweiten Hälfte des Buches mein Bestreben war, die äußerste Unparteilichkeit zu wahren und jede Richtung mit den ihr selbst gemäßen Argumenten zu begründen, glaubte ich dem Leser am Schluß ein kurzes persönliches Glaubensbekenntnis schuldig zu sein (Ende des § 18); daß dieses auch für mich schon morgen überholt oder modifiziert sein kann und für die Überzeugung des Lesers keineswegs maßgebend sein darf, sei auch an dieser Stelle betont für Leser, die sich etwa das *iurare in verba magistri* noch nicht in dem für den Mathematiker und Philosophen wünschenswerten Maße abgewöhnt haben.

Auf eine möglichst erschöpfende Zusammenstellung der neueren (namentlich auch der vielfach mit Schwierigkeiten beschafften ausländischen) Literatur zu den behandelten Gegenständen der Grundlagenforschung habe ich besondere Sorgfalt verwandt; diese Mühe wird belohnt sein, wenn dadurch für jüngere Forscher die Inangriffnahme des einen oder anderen Problems angeregt und erleichtert wird. Die Lektüre des Buches selbst erfordert weder weitere Literatur noch überhaupt besondere Vorkenntnisse.

Für freundliche Hilfe bei der Korrektur und wertvolle Ratschläge zu einzelnen Gegenständen danke ich Frau DEUTSCHBEIN-Marburg und den Herren BECKER-Freiburg i. B., BERNAYS-Göttingen, CARNAP-Wien, KURATOWSKI-Lemberg, PRÜFER-Münster, RAMSEY-Cambridge, TARSKI-Warschau; ganz besonders aber den Herren BAER-Freiburg i. B. und PLESSNER-Marburg, die vollständige Korrekturen des Buches durchgesehen und es durch eine Fülle wichtiger Bemerkungen bereichert haben. Weiterhin gilt mein Dank der Verlagsbuchhandlung *Julius Springer* für ihr stets bewährtes Entgegenkommen, ferner den Freunden im In- und Ausland, die sich mit Fragen und Anregungen zur bisherigen Gestalt des Buches an mich gewandt haben, sowie Herrn cand. math. STROCKA-Kiel, der die Herstellung des Namenverzeichnisses übernahm. Schließlicb gehe das Buch diesmal nicht in die Welt ohne ein Wort des Gedenkens für GERHARD HESSENBERG, den ausgezeichneten Menschen und Denker, dessen Arbeiten ich in wissenschaftlicher und didaktischer Hinsicht gleich viel verdanke.

Kiel, im Sommer 1928.

ADOLF FRAENKEL.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Einleitung	1
Erstes Kapitel.	
Grundlagen. Begriff der Kardinalzahl.	
§ 2. Begriff der Menge. Beispiele von Mengen	4
1. Beispiele 4. — 2. Über Cantors Definition des Mengenbegriffs 13.	
§ 3. Die Begriffe der Äquivalenz, der Teilmenge, der unendlichen Menge	15
1. Abbildung und Äquivalenz 15. — 2. Grundeigenschaften der Äquivalenz 19. — 3. Begriff der Teilmenge 20. — 4. Dedekinds Kennzeichnung der unendlichen Mengen 22. — 5. Verhältnis der gewöhnlichen zur Dedekindschen Kennzeichnung 24. — Aufgaben 26.	
§ 4. Abzählbare Mengen	27
1. Definition der abzählbaren Mengen 27. — 2. Einfachste Beispiele und Sätze 28. — 3. Die Menge der rationalen Zahlen 30. — 4. Die Menge der algebraischen Zahlen 35. — 5. Anwendungen auf beliebige unendliche Mengen 40. — Aufgaben 42.	
§ 5. Das Kontinuum. Begriff der Kardinalzahl oder Mächtigkeit. Die elementaren Mächtigkeiten \aleph , \mathfrak{c} , \mathfrak{f}	43
1. Die Problemstellung 43. — 2. Beweis der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums 46. — 3. Bemerkungen zum vorstehenden Beweis 48. — 4. Geometrische Deutung und Verallgemeinerung des Ergebnisses 50. — 5. Existenz der transzendenten Zahlen 53. — 6. Der Begriff der Kardinalzahl oder Mächtigkeit. Die Kardinalzahlen \aleph und \mathfrak{c} 55. — 7. Zur Kritik obiger Begriffsbildung 57. — 8. Die Kardinalzahl \mathfrak{f} der Menge aller Funktionen 61. — Aufgaben 64.	
Zweites Kapitel.	
Das Rechnen mit Kardinalzahlen.	
§ 6. Die Größenanordnung der Kardinalzahlen	64
1. Definition der Größenanordnung 64. — 2. Einfachste Folgerungen 66. — 3. Satz von Cantor 67. — 4. Der Äquivalenzsatz 70. — 5. Das Problem der Vergleichbarkeit 76. — Aufgaben 77.	
§ 7. Addition und Multiplikation der Kardinalzahlen	77
1. Grundsätzliche Vorbemerkungen 77. — 2. Addition von Mengen 79. — 3. Eine Grundeigenschaft der Addition 81. — 4. Addition von Kardinalzahlen 82. — 5. Formale Rechenregeln und Beispiele 85. — 6. Multiplikation von Mengen 87. — 7. Die Multiplikation von Kardinalzahlen und ihre Regeln 91. — 8. Ungleichungen für Kardinalzahlen. Inverse Operationen 95. — 9. Beispiele zur Multiplikation 96. — 10. Die Mächtigkeit mehrdimensionaler Kontinuen 98. — Aufgaben 102.	
§ 8. Potenzierung der Kardinalzahlen. Das Problem des Unendlichkleinen 103	
1. Die Potenzierung als wiederholte Multiplikation 103. — 2. Definition der Potenz mittels der Belegungsmenge 104. — 3. Die Potenzmenge 107. — 4. Formale Rechenregeln 108. — 5. Die Potenzmenge	

einer abzählbaren Menge (Kontinuum) 109. — 6. Weitere Beispiele 111. — 7. Das Problem des Unendlichkleinen 113. — 8. Unendlichkleines und nichtarchimedische Größensysteme 117. — Aufgaben 119. Seite

Drittes Kapitel.

Ordnungstypen und Ordnungszahlen.

- § 9. Geordnete Mengen. Ähnlichkeit und Ordnungstypus 120
 1. Allgemeine Vorbemerkungen 120. — 2. Ordnungsbeziehung und geordnete Menge 124. — 3. Begriff der Ähnlichkeit. Beispiele 127. — 4. Begriff des Ordnungstypus 132. — 5. Addition zweier Ordnungstypen 134. — 6. Addition beliebig vieler Ordnungstypen 137. — 7. Über die Multiplikation von Ordnungstypen 139. — Aufgaben 142.
- § 10. Lineare Punktmengen 142
 1. Dichte und stetige geordnete Mengen 143. — 2. Beispiele 145. — 3. Der Ordnungstypus der Menge aller rationalen Punkte einer Geraden 150. — 4. Der Ordnungstypus des Linearkontinuums 154. — 5. Häufungspunkt und daran anschließende Begriffsbildungen 158. — 6. Beispiele 160. — 7. Schlußbemerkung über die Theorie der Punktmengen und ihre Anwendungen 163. — Aufgaben 164.
- § 11. Allgemeine Theorie der wohlgeordneten Mengen. Von den endlichen Mengen 165
 1. Grundbegriffe und Grundtatsachen 165. — 2. Die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen 169. — 3. Addition und Multiplikation. Ordnungszahlen 174. — 4. Eigenschaften der wohlgeordneten Mengen und ihrer Abschnitte 178. — 5. Über die endlichen Mengen und die natürlichen Zahlen 181. — Aufgaben 184.
- § 12. Ordnungszahlen und Alefs. Die Wohlordnung beliebiger Mengen und ihre Bedeutung 185
 1. Die Größenanordnung der Ordnungszahlen 185. — 2. Das sukzessive Bildungsgesetz der Ordnungszahlen 187. — 3. Die Reihe der Ordnungszahlen. Transfinite Induktion 189. — 4. Alefs 192. — 5. Das Problem der allgemeinen Vergleichbarkeit. Der Wohlordnungssatz 194. — 6. Beweis des Wohlordnungssatzes 200. — 7. Der Vergleichbarkeitsatz 204. — Aufgaben 208.

Viertes Kapitel.

Erschütterungen der Grundlagen und ihre Folgen.

- § 13. Die Antinomien der Mengenlehre 209
 1. Historisches 209. — 2. Die „logischen“ Antinomien 210. — 3. Die „epistemologischen“ Antinomien 214. — 4. Zur Aufklärung der Antinomien im allgemeinen 218.
- § 14. Der Intuitionismus, besonders Brouwer 220
 1. Das Unendliche als Gefahrenquelle 220. — 2. Historische Einleitung zum Intuitionismus 223. — 3. Die intuitionistische Grundthese: mathematische Existenz = Konstruierbarkeit 226. — 4. Die Ablehnung des „tertium non datur“ 228. — 5. Das Problem der Entscheidbarkeit 234. — 6. Der Mengenbegriff. Das Wesen des Kontinuums 236. — 7. Die Konsequenzen für die übrige Mathematik 240. — 8. Die Urintuition des Allgemeinbegriffs der natürlichen Zahl 242.
- § 15. Die nicht-prädikativen Begriffsbildungen. Russell und die logizistische Methode 244
 1. Erwünschtheit einer konservativen Behandlung der Antinomien-

krise 244. — 2. Die nicht-prädikativen Begriffsbildungen und ihr Verbot 247. — 3. Russells Typen- und Stufentheorie 254. — 4. Das Reduzibilitätsaxiom 259. — 5. Symbolische Logik. Die „Principia Mathematica“ 263.

Fünftes Kapitel.

Der axiomatische Aufbau der Mengenlehre. Die axiomatische Methode.

§ 16. Das Axiomensystem	268
1. Einleitendes über das Wesen einer Axiomatik 268. — 2. Die Grundrelation ε . Vorbereitende Definitionen 271. — 3. Relationales Axiom (Axiom der Bestimmtheit) 273. — 4. Die „erweiternden“ bedingten Existenzaxiome (Axiome der Paarung, der Vereinigung, der Potenzmenge) 275. — 5. Die „einschränkenden“ bedingten Existenzaxiome (Axiome der Aussonderung und der Auswahl) 280. — 6. Verschärfung des Aussonderungsaxioms 285. — 7. Das Auswahlaxiom als reines Existenzaxiom 288. — 8. Bedeutung und Geschichte des Auswahlaxioms 295. — 9. Unbedingtes Existenzaxiom und Axiome spezieller Art (Axiom des Unendlichen und Axiom der Ersetzung) 305. — 10. Historisches zum Axiomensystem 310.	
§ 17. Die Tragweite des Axiomensystems	312
1. Die Herleitung des Rechnens mit Mengen 312. — 2. Axiomatische Theorie der Äquivalenz 313. — 3. Axiomatische Theorie der Ordnung 316. — 4. Die endlichen und die abzählbar unendlichen Mengen 320. — 5. Der Fortfall der Antinomien 322. — 6. Die nicht-prädikativen Verfahren innerhalb der Axiomatik 324. — 7. Axiomatik und Intuitionismus. Verschiedenheit der Auffassung über das Wesen der mathematischen Objekte 325.	
§ 18. Die Axiomatik in allgemein-methodischer Hinsicht	334
1. Die axiomatische Methode im allgemeinen 334. — 2. Über die Unabhängigkeit eines Axiomensystems 340. — 3. Über die Unabhängigkeit des obigen Axiomensystems der Mengenlehre 343. — 4. Über die Vollständigkeit eines Axiomensystems 347. — 5. Die Unvollständigkeit des obigen Axiomensystems 354. — 6. Über die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems 356. — 7. Hilberts „metamathematische“ Methode 366. — 8. Das Verhältnis der Mathematik zur Logik. Schlußbemerkungen zum Streit um die Grundlegung der Mathematik 375.	
§ 19. Schluß: Die Bedeutung der Mengenlehre	388
Literaturverzeichnis	394
Namenverzeichnis	418
Sachverzeichnis	422