

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

W. BLASCHKE · R. GRAMMEL · E. HOPF · F. K. SCHMIDT  
B. L. VAN DER WAERDEN

BAND LII

FORMELN UND SÄTZE  
FÜR DIE SPEZIELLEN FUNKTIONEN  
DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

WILHELM MAGNUS UND FRITZ OBERHETTINGER



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1943

FORMELN UND SÄTZE FÜR DIE  
SPEZIELLEN FUNKTIONEN DER  
MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

DR. WILHELM MAGNUS

APL. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

UND

DR. FRITZ OBERHETTINGER

BERLIN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1943

**ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.**

**Copyright 1943 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg**

**Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag OHG. in Berlin 1943**

**ISBN 978-3-662-41656-3**

**ISBN 978-3-662-41791-1 (eBook)**

**DOI 10.1007/978-3-662-41791-1**

## Vorwort.

Die zunehmende Verwendung mathematischer Hilfsmittel in der physikalischen und technischen Literatur macht ein ständiges Nachschlagen in umfangreichen, mitunter schwer zugänglichen Werken der mathematischen Fachliteratur und in zahlreichen Einzelarbeiten notwendig. Dabei gibt es aber eine sehr große Zahl von Resultaten, insbesondere von Formeln, die sich auf geringem Raum wiedergeben lassen und einen großen Teil dessen ausmachen, was immer wieder gebraucht wird und immer wieder mit Mühe zusammengesucht werden muß. Die Verfasser hoffen, daß die von ihnen vorgelegte Übersicht über die Eigenschaften einer Reihe von speziellen Funktionen hier von Nutzen sein wird.

Um Unterbrechungen des Textes durch allzu viele Hinweise zu vermeiden, sind Zusammenstellungen der benutzten Abkürzungen und der verschiedenen Funktionssymbole sowie das Literaturverzeichnis am Schluß des Buches angefügt worden.

Alle Beweise, und alles, was zur Methode gehört, ist fortgelassen worden. Dementsprechend sind z. B. auch die zahlreichen Darstellungen der behandelten Funktionen durch Schleifenintegrale nicht aufgenommen worden, da diese wesentlich ein methodisches Hilfsmittel und nicht unmittelbar anzuwendende Formeln darstellen und im übrigen in den meisten Fällen aus den mitgeteilten Formeln in leicht ersichtlicher Weise gewonnen werden können.

Der Fragenkreis der Reihenentwicklungen nach orthogonalen Funktionen ist nicht berücksichtigt worden, da dies ohne ein ausführliches Eingehen auf Konvergenz- und Entwicklungssätze wenig sinnvoll zu sein schien; dementsprechend sind außer einigen speziellen Reihenentwicklungen nur die verschiedenen Orthogonalitätsrelationen angegeben worden.

Die LAMÉschen Funktionen sind fortgelassen und die Behandlung der MATHIEUSchen Funktionen ist auf ein Mindestmaß beschränkt worden, da für diese beiden Funktionenklassen nur wenige abgeschlossene Resultate vorliegen, so daß ihre Verwendung ein Einarbeiten in die Methoden unerlässlich macht; gerade für diese Funktionen existiert

im übrigen die ausführliche Monographie von M. I. O. STRUTT, auf die hier verwiesen werden kann.

Für freundlichen Rat und wertvolle Hilfe sind wir Frau Dr. FLÜGGE-LOTZ und den Herren Dr.-Ing. FLÜGGE, Professor Dr. H. GEPPERT, Professor Dr. R. GRAMMEL, Professor Dr. H. SCHMIDT und insbesondere Herrn Professor Dr. W. Süß zu größtem Dank verpflichtet.

Dem Springer-Verlag danken wir für die großzügige Unterstützung unserer Arbeit.

Berlin, im Januar 1943.

**Die Verfasser.**

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Erstes Kapitel: Die Gammafunktion . . . . .	1
Zweites Kapitel: Die hypergeometrische Funktion . . . . .	7
§ 1. Die hypergeometrische Reihe . . . . .	7
§ 2. Die RIEMANNSCHE Differentialgleichung . . . . .	12
Drittes Kapitel: Die Zylinderfunktionen . . . . .	16
§ 1. Definitionen, Differentialgleichung, Rekursionsformeln, Reihenentwicklungen, Mehrdeutigkeit, unbestimmte Integrale . . . . .	16
§ 2. Additionstheoreme. Multiplikationstheorem. . . . .	20
§ 3. Asymptotische Entwicklungen . . . . .	22
§ 4. Nullstellen. Produktzerlegung für $J_\nu(z)$ . Eine Partialbruchzerlegung	25
§ 5. Integraldarstellungen . . . . .	26
§ 6. Integralbeziehungen zwischen Zylinderfunktionen. . . . .	28
§ 7. Bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen, insbesondere diskontinuierliche Faktoren und Integraldarstellungen elementarer Funktionen . . . . .	32
§ 8. Den BESSELSCHEN Funktionen zugeordnete Polynome . . . . .	38
§ 9. Die Funktionen von STRUVE, ANGER und WEBER . . . . .	40
§ 10. Die Funktionen von LOMMEL . . . . .	42
§ 11. Beispiele KAPTEYN'SCHER Reihen . . . . .	43
§ 12. SCHLÖMILCH-REIHEN . . . . .	43
Anhang zum dritten Kapitel: § 13. MATHIEUSCHE Funktionen . . . . .	44
Viertes Kapitel: Kugelfunktionen . . . . .	49
§ 1. Differentialgleichung, Definitionen und Bezeichnungen . . . . .	49
§ 2. Die LEGENDRESCHEN Polynome . . . . .	50
§ 3. Die zugeordneten LEGENDRESCHEN Kugelfunktionen erster Art . . . . .	53
§ 4. Die Lösungen der LEGENDRESCHEN Differentialgleichung . . . . .	55
§ 5. Allgemeine Kugelfunktionen . . . . .	59
a) Darstellung durch hypergeometrische Funktionen. S. 59. —	
b) Rekursionsformeln und Beziehungen zwischen verschiedenen Kugelfunktionen. S. 61. — c) Formeln für spezielle Werte von $\nu$ , $\mu$ , $\nu$ . S. 63. — d) Analytische Fortsetzung und Verhalten für $ z  \gg 1$ . S. 64. — e) Integraldarstellungen. S. 66. — f) Einige Integrale mit Kugelfunktionen. S. 69. — g) Das Additionstheorem. S. 69. — h) Sätze über Nullstellen. S. 70. — i) Asymptotisches Verhalten für große Werte von $ \nu $ . S. 71. — k) Ergänzungen. S. 73.	
§ 6. Kegelfunktionen. . . . .	74
§ 7. Ring- oder Torusfunktionen . . . . .	75
Anhang zum vierten Kapitel: Die Funktionen von GEGENBAUER . . . . .	76

	Seite
<b>Fünftes Kapitel: Orthogonale Polynome</b> . . . . .	<b>78</b>
§ 1. TSCHEBYSCHEFFSche Polynome . . . . .	78
§ 2. HERMITESche Polynome . . . . .	80
§ 3. JACOBISche Polynome . . . . .	83
§ 4. LAGUERRESche Polynome . . . . .	84
<b>Sechstes Kapitel: Die konfluente hypergeometrische Funktion und ihre Spezialfälle</b> . . . . .	<b>86</b>
§ 1. Die Funktionen von KUMMER . . . . .	86
§ 2. Die Funktionen von WHITTAKER . . . . .	88
§ 3. Die Funktionen des parabolischen Zylinders . . . . .	91
§ 4. Übersicht über die Spezialfälle der konfluenten hypergeometrischen Funktion . . . . .	94
a) Die LAGUERRESchen Funktionen. S. 94. — b) Die Funktionen des parabolischen Zylinders. S. 95. — c) Die Zylinderfunktionen. S. 95. — d) Die unvollständige Gammafunktion. S. 95. — e) Das Fehlerintegral und die FRESNELSchen Integrale. S. 96. — f) Integrallogarithmus, Exponentialintegral, Integralsinus, Integralcosinus. S. 97.	
<b>Siebentes Kapitel: Thetafunktionen, elliptische Funktionen und Integrale</b> . . . . .	<b>98</b>
§ 1. Thetafunktionen . . . . .	98
§ 2. Die WEIERSTRASSsche $\wp$ -Funktion . . . . .	100
§ 3. Die elliptischen Funktionen von JACOBI . . . . .	102
§ 4. Elliptische Integrale . . . . .	105
<b>Achstes Kapitel: Integraltransformationen und Integralumkehrungen</b> . . . . .	<b>114</b>
§ 1. Die FOURIER-Transformation . . . . .	115
§ 2. Die LAPLACE-Transformation . . . . .	120
§ 3. Die HANKEL-Transformation . . . . .	136
§ 4. Beispiele zur MELLIN-Transformation . . . . .	137
§ 5. Über die GAUSS-Transformation . . . . .	138
§ 6. Verschiedene Beispiele von Integralgleichungen erster Art . . . . .	189
1. Die Reziprozitätsformel von HILBERT für den Cotangens-Kern . . . . .	139
2. Modifikationen der Formel von HILBERT . . . . .	140
3. Die ABELSche Integralgleichung . . . . .	141
4. Integralumkehrungen vom Typ der MELLIN-Transformation . . . . .	141
5. Weitere Beispiele . . . . .	142
<b>Neuntes Kapitel: Koordinaten-Transformationen</b> . . . . .	<b>144</b>
§ 1. Differentialoperationen in orthogonalen Koordinaten . . . . .	144
§ 2. Beispiele zur Trennung der Veränderlichen . . . . .	154
Anhang zum neunten Kapitel: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	159
<b>Zusammenstellung der benutzten Abkürzungen</b> . . . . .	<b>162</b>
<b>Verzeichnis der Funktionssymbole</b> . . . . .	<b>164</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	<b>167</b>
<b>Sach- und Namenverzeichnis</b> . . . . .	<b>171</b>