

Leitfaden für den Unterricht
in der
S t e r e o m e t r i e
mit den Elementen der
Projektionslehre.

Von
Dr. Carl Gusserow,
Oberlehrer am Dorotheenstädtischen Realgymnasium in Berlin.

~~~~~  
*Mit 45 in den Text gedruckten Figuren.*  
~~~~~



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1885

ISBN 978-3-662-31985-7

ISBN 978-3-662-32812-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-32812-5

Vorrede.

Bei dem Übergange von den Vorstellungen in der Ebene auf solche im Raume ist es rationeller, erst zwei Ebenen — und zwar auch diese erst nach einander und dann gleichzeitig — ferner mehrere Ebenen nach einander und dann erst gleichzeitig der Betrachtung zu unterziehen, statt, wie es meist zu geschehen pflegt (z. B. bei dem Satze vom Lot auf einer Ebene), gleich anfangs mehrere Ebenen in einer Vorstellung zu vereinigen. Diesem plötzlich gesteigerten Anspruch pflegt in der Regel auch das Vorstellungsvermögen der Schüler nicht sofort gewachsen zu sein, so dass räumliche Anschauungen häufig Schwierigkeiten finden, welche in der Natur der Sache gar nicht begründet sind.

In vorliegendem Leitfaden habe ich einen solchen allmählichen Übergang dadurch zu erzielen versucht, dass ich von vornherein den Projektionsbegriff nicht nur eingeführt, sondern auch mit ihm gearbeitet habe. Ausserdem aber glaube ich damit noch zwei andere Vorteile erreicht zu haben, von denen ich hoffe, dass sie auch von anderer Seite als solche anerkannt werden mögen. Erstens gestattet das Vertrautsein des Schülers mit den Vorstellungen: Grundebene, projizierende Ebene u. dgl. häufig eine so abgekürzte Darstellung, wie sie anderweitig nicht zu ermöglichen wäre. Es erklärt sich hieraus auch der Umstand, dass verhältnissmässig wenig Figuren zur Erläuterung erforderlich waren. Von der Ansicht nämlich ausgehend, dass man einfache Figuren in einer Ebene, deren Stellung zur Grundebene genau präzisiert ist, dem Vorstellungsvermögen des Schülers überlassen muss, wenn

man ihm nicht Eselsbrücken bauen will, habe ich Figuren erst gegeben, wenn mehrere Ebenen in Beziehung zu einander gebracht wurden oder ebene Figuren nicht mehr einfach genug erschienen, um ohne äussere Mittel schnell und leicht in der Vorstellung erzeugt werden zu können. Einen zweiten Vorzug finde ich darin, dass bei Benutzung dieses Leitfadens der Unterricht in der Stereometrie mit dem in der Projektionslehre und dem Projektionszeichnen in stete Beziehung gebracht werden kann. Wie belebend nun beide Unterrichtsgegenstände auf einander einzuwirken im stande sind, wird nur derjenige voll ermessen, welcher dieselben gleichzeitig in derselben Klasse unterrichtet hat. Gewöhnlich aber liegen beide Unterrichtsgegenstände in verschiedenen Händen und werden von so verschiedenen Gesichtspunkten aus gehandhabt, dass, wenn sie nicht sogar einander stören, mindestens doch ihre gegenseitige Befruchtung vollständig verloren geht. Um einem solchen Verluste vorzubeugen, ist es nun nicht notwendig gewesen, das Projektionszeichnen als wesentlichen Bestandteil dieses Lehrganges aufzufassen; im Gegenteil ist auf dasselbe nirgends näher eingegangen, sondern nur mehrfach Gelegenheit gegeben, es zur Ergänzung heranzuziehen. Ebensowenig man also in diesem Leitfaden ein Lehrbuch der Projektionslehre erwarten möge, ebensowenig befürchte man, dass es nur in Verbindung mit dem Reissbrett zu gebrauchen wäre.

Hiervon abgesehen bin ich der üblichen Anordnung und Behandlung des Stoffes bis auf unwesentliche Aenderungen, die ich für kleine Verbesserungen halte, gefolgt. Im § 16 sind die wichtigsten von den bei Betrachtung der Körper erforderlichen Definitionen zusammengestellt. Doch folgt hieraus nicht, dass derselbe nun auch für sich vor den anderen durchgearbeitet werden soll; er kann vielmehr, ebenso wie die §§ 17—19 über die Vergleichung der Körper, mit den §§ 20 und 21 über deren Inhaltsermittlung gemeinsam durchgenommen werden. Die Betrachtung der regelmässigen Körper habe ich in den Anhang verlegt, damit dieselben nach Belieben des Lehrers an passender Stelle eingeschoben werden können.

Die Inhaltsermittlung der Körper habe ich der Kürze wegen auf den Cavalerischen Satz gestützt und hoffe, dass der beigebrachte Beweis als ausreichend erachtet werden möge. Für diejenigen, denen er nicht genügen sollte, habe ich das Pyramidenproblem in Anhang I in anderer, wie ich glaube neuer Fassung und Lösung, dargestellt und diese Darstellung so eingerichtet, dass sie ohne Schwierigkeit an die Stelle des § 17 treten kann. Zu dem Beweis des Cavalerischen Satzes habe ich mich eines planimetrischen bedient, dessen Ableitung sich nicht in den Lehrbüchern findet und deshalb ebenfalls im Anhang*) gegeben werden musste. Ich mochte ihn nicht, wie wohl möglich, unterdrücken, weil ich die Methode, eine Schlussfolge in ihrer Allgemeingültigkeit, durch Zeichnung zum Ausdruck zu bringen, für ganz besonders bildend halte. Das Kürzeste bleibt freilich immer, den Cavalerischen Satz als Grundsatz zu behandeln und sich mit der Überzeugung von seiner Richtigkeit zu begnügen.

Abweichend von dem Üblichen bin ich sofort vom vollständigen Prisma auf das schiefabgeschnittene dreiseitige und das Prismatoid übergegangen und habe nur in Rücksicht auf das Hergebrachte die drei Folgerungen in betreff der Pyramide dem § 17 angefügt. Im wesentlichen ist der Lehrgang folgender: das dreiseitige Prisma mit dem Inhalt Gh wird geteilt in die Pyramide $\frac{1}{3} Gh$ und den Keil $\frac{2}{3} Gh$; wird nun ein Prismatoid auf seine Grundfläche projiziert, so teilen die projizierenden Ebenen dasselbe 1) in ein Prisma, 2) in so viel Pyramiden, wie Grundkanten, und 3) in so viel Keile, wie Deckkanten vorhanden sind.

Ferner ist die Halbkugel, Fig. 18, gleich einem solchen Keil, und ebenso das Kloostergewölbe.

Die Kugel und ihre Teile habe ich im § 26 für sich behandelt und nicht zusammen mit den anderen Körpern, §§ 27—29, deren Parallelschnitte inhaltlich durch eine Funk-

*) In anderer Weise: Crelle J. 1833. Vergl. Baltzer, Elemente der Mathematik. Viertes Buch, § 9.

tion zweiten Grades ihrer Schnitthöhe bestimmt werden, teils um sie gewissermassen als Vorübung für diese §§ zu benutzen, teils um sie von diesen unabhängig durchnehmen zu können. Will man letztere aber ganz ausscheiden, so kann man noch das Klostergewölbe über einem Rechteck und somit auch das Kreuzgewölbe nach § 26, Fig. 18 vorweg nehmen. Ueberhaupt beachte man, dass alle bis hierher mit einem † versehenen Paragraphen oder durch kleineren Druck ausgezeichneten Stellen unbeschadet des Verständnisses bei einer ersten Durcharbeitung des Stoffes übergangen werden können.

Die von mir § 18 gegebene Formel für den Inhalt des Prismatoids halte ich für einfacher, sowohl in der Ableitung wie im Gebrauch, als die bisher übliche, vergl. § 19. Es ist nämlich für die Formel in § 18 die Figur $D + O$ zu berechnen, d. h. eine Figur, die aus jeder Projektion des Prismatoids auf seine Grundfläche durch Weglassung der Grundkanten entsteht, und deren Eck-Koordinaten durch die Projektion gegeben sind, während dieselben für H , in § 19, erst aus jenen berechnet werden müssen, und H selbst erst konstruiert werden muss. — Für die bekannten aber seltener gebrauchten Formeln $4d$ und e in § 20 habe ich in § 24 Verwendungen angegeben, von denen ich auf die Vereinfachung der Simpsonschen Regel aufmerksam mache. Besonders einfach gestaltet sich die Formel § 23 teils für Aufmessungen, teils für die Bestimmung des Schwerpunktes eines Prismatoids.

Der Behandlung des Schwerpunktes habe ich in § 30 u. ff. ausgiebigen Raum gewährt, weniger in der Ansicht, dass sie dem Schüler notwendigerweise in dieser Ausführlichkeit gegeben werden müsste, als, weil überhaupt eine elementare Darstellung dieses Abschnittes der Stereometrie zu fehlen scheint, ein Behelf mit den ungenauen Definitionen der Experimental-Physik aber unstatthaft ist. Die Formel für die Schwerpunktsbestimmung eines beliebigen Polyeders (§ 31, 12) ist unschwer zu verstehen, auch die anderen Schwerpunktsbestimmungen, die Guldinsche Regel, die Complonation von Cylinderhufen und von Oberflächen zweiten Grades werden vorgeschrittenen Schülern stets willkommene Beispiele

für die Repetition sein, wenn sie teilweise auch über das Pensum eines Realgymnasiums oder einer technischen Fachschule hinaus gehen. Die Leibung des Kloster- und des Kreuzgewölbes ohne Schwerpunktsbetrachtung zu ermitteln, wird die Andeutung in der Anmerkung S. 80 ausreichen.

Indem ich nun vorliegenden Leitfaden, für dessen zweckentsprechende Ausstattung der Herr Verleger gesorgt hat, einer wohlwollenden Beachtung der geehrten Fachkollegen unterbreite, kann ich die Bitte nicht unterdrücken, Abweichungen von dem Gewohnten, welche mit der befolgten Methode zusammenhängen, von denen zu unterscheiden, welche ich aus anderen Gründen vorgeschlagen habe; vielleicht erwerben sich die einen oder die anderen Freunde, wenn sie in ihrer Gesamtheit die gehoffte Zustimmung nicht finden sollten.

Eine besondere Aufgabensammlung habe ich nicht angefügt, teils weil deren genug vorhanden sind, teils weil in den einzelnen Paragraphen vielfach Veranlassung genommen ist, auf Aufgaben und Bildung von solchen hinzuweisen, soweit sich dieselben unmittelbar aus dem Vorgetragenen ergeben.

Meinen verehrten Herren Kollegen, dem Herrn Professor Thurein, Dr. Levy und Dr. Lüpke spreche ich an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aus für die schätzenswerte Hülfe, welche sie mir mit Rat und That haben angedeihen lassen.

Berlin, im Dezember 1884.

Dr. Carl Gusserow.

Inhalt.

	Seite
I. Einleitung. §§ 1. 2.	1
II. Die Stellung der Geraden zur Ebene. §§ 3—10	2
III. Die Lage zweier Ebenen zu einander. §§ 11—13.	9
IV. Die Lage mehrerer Ebenen zu einander. — Die Ecke. §§ 14. 15.	16
V. Ebenflächige Körper (Polyeder)	18
Erklärungen. § 16.	
Inhalts-Vergleichung. §§ 17—19.	
Inhalts-Ermittlung. §§ 20—24.	
VI. Krummflächige Körper. §§ 25—29	46
VII. Vom Schwerpunkt. § 30	62
Schwerpunkts-Bestimmungen. §§ 31. 32.	
Guldinsche Regel. § 33.	
Schwerpunkts-Bestimmungen. § 34.	
Leibung der Gewölbe. — Oberfläche des Ellipsoids und Paraboloids. § 35.	

A n h a n g.

I. Das Pyramidenproblem	86
II. Der Eulersche Satz und die regelmässigen Polyeder	90
III. Lehrsatz aus der Planimetrie	94
IV. Lehrsatz aus der Algebra	96
