

Prom. Nr. 1605

METHODEN ZUR GENÄHERTEN
BERECHNUNG VON EIGENWERTEN
ELASTISCHER SCHWINGUNGEN
ANISOTROPER KÖRPER

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN
GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
HANS J. MÄHLY
VON BASEL

Referent: Prof. Dr. P. SCHERRER

Korreferent: Prof. Dr. H. ZIEGLER

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1951

ISBN 978-3-662-23287-3 ISBN 978-3-662-25320-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-25320-5

Veröffentlicht in:

ERGEBNISSE DER EXAKTEN NATURWISSENSCHAFTEN

Band 24, S. 402 — 442

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit soll der Versuch gemacht werden, die wichtigsten Methoden zur genäherten Berechnung von Eigenwerten auf den Fall von Schwingungen anisotroper Körper zu übertragen und im Anschluß an diese Methoden einige neue Formeln herzuleiten, die sich bei numerischen Rechnungen als wertvoll erwiesen haben.

Physikalisch ist das hier behandelte Eigenwertproblem durch die Voraussetzung beschränkt, daß das HOOKESCHE Gesetz gelten soll und daß der Ruhezustand des Körpers, d. h. der undeformierte Zustand, stabil sei, daß also für jede Deformation Arbeit geleistet werden muß; dagegen darf der Körper sowohl anisotrop als auch inhomogen sein. Aus diesen Voraussetzungen ergibt sich, wie im *I. Abschnitt* gezeigt wird, eine *Differentialgleichung* der Form:

$$\sum_{\mu, \sigma, \tau=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} C_{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \dot{f}_\tau + \varrho \lambda \dot{f}_\nu = 0,$$

wobei die Koeffizienten $C_{\mu\nu\sigma\tau}$ sowie die Dichte ϱ stückweis-stetige Funktionen des Ortes sind. Die Eigenwerte λ_i werden aber erst durch die Angabe der *Randbedingungen* bestimmt; wir beschränken uns auf die beiden wichtigsten Fälle, daß die Oberfläche des Körpers entweder kräftefrei ist, was mathematisch durch die *Randbedingung für freie Ränder*:

$$\sum_{\mu, \sigma, \tau=1}^3 n_\mu C_{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \dot{f}_\tau = 0^1$$

ausgedrückt wird, oder daß die Oberfläche unbeweglich ist; dann muß am Rande

$$\dot{f}_\tau = 0$$

sein (*Randbedingung für feste Ränder*). — Dieses Eigenwertproblem ist nur für ganz wenige Spezialfälle exakt lösbar²; das Schwergewicht dieser Arbeit liegt deshalb auf der Darstellung von Näherungsmethoden.

Im *I. Abschnitt* werden zunächst die bekannten Grundgleichungen der Elastizitätstheorie unter Verwendung einer bequemen indexfreien Tensorschreibweise zusammengestellt und im 2. Paragraphen auch für

¹ Mit n_1, n_2, n_3 bezeichnen wir die Komponenten der Einheitsnormale auf der Oberfläche des Körpers.

² Nämlich meines Wissens nur für isotrope Kugeln und Kugelschalen (7); dagegen können, wie ORTVA Y (15) bemerkt hat, die Schwingungen eines Quaders, ja selbst eines isotropen Würfels, weder bei fester noch bei freier Oberfläche exakt berechnet werden, sondern nur bei experimentell nicht realisierbaren „gemischten Randbedingungen“.

allgemeine, krummlinige Koordinaten formuliert. Im 3. Paragraphen wird die Gültigkeit der Vollständigkeitssätze (Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen) postuliert; daß diese Sätze tatsächlich richtig sind, erscheint vom physikalischen Standpunkt aus fast selbstverständlich, aber ein exakter mathematischer Beweis liegt meines Wissens nur für verwandte, etwas einfachere Fälle vor.

Im *II. Abschnitt* werden zunächst die Ziele und Möglichkeiten der genäherten Berechnung von Krystallschwingungen besprochen. Danach wird das RITZsche Verfahren als Stammvater einer ganzen Familie von Näherungsmethoden eingehend besprochen und es werden einige wichtige mit dem RITZschen Verfahren zusammenhängende Sätze bewiesen. Die Iterationsmethode und das GRAMMELSche Verfahren werden der Vollständigkeit halber erwähnt, sind aber für die Berechnung von Krystallschwingungen i. a. nicht brauchbar. Im 8. Paragraphen wird das schwierige Problem der Berechnung (oder wenigstens Abschätzung) unterer Schranken besprochen, wobei die beiden wichtigen Sätze von TEMPLE und WEINSTEIN erweitert und in Zusammenhang gebracht werden. Man kann nämlich auch für höhere Eigenwerte untere Schranken berechnen, wenn man eine nicht zu schlechte untere Schranke für den nächsthöheren Eigenwert kennt; bei Verwendung eines linearen Ansatzes kann man diese unteren Schranken ähnlich wie beim RITZschen Verfahren direkt aus einer Säkulargleichung gewinnen, ohne Berechnung der Koeffizienten des linearen Ansatzes. Auch die oberen Schranken des 9. Paragraphen sind neu, doch ist ihre praktische Bedeutung wohl weniger groß.

Im *III. Abschnitt* werden die wichtigsten Formeln der Störungsrechnung hergeleitet. Auch hier gehen wir nicht von Differentialgleichung + Randbedingung aus, sondern direkt vom Variationsproblem, wodurch die Beweise einfacher und übersichtlicher werden als bei der üblichen Methode. Man sieht dann auch sofort, daß mit der *ersten* Näherung für die Eigenfunktionen die Eigenwerte nicht nur in zweiter, sondern auch in *dritter* Näherung berechnet werden können.

Es lag nicht in meiner Absicht, eine vollständige Aufzählung aller Näherungsmethoden zur Berechnung von Eigenwerten zu geben, sondern vor allem die wichtigsten Formeln so zu verallgemeinern und darzustellen, daß sie unmittelbar für die Berechnung von Krystallschwingungen (und natürlich auch von Schwingungen isotroper Körper) gebraucht werden können. Die Schwierigkeiten und Möglichkeiten der praktischen Rechnung hoffe ich bald an einer Reihe von Beispielen erläutern zu können.

(Vgl. unsere kurzen, vorläufigen Veröffentlichungen über Schwingungen von Platten und Stäben (10), (11).)