

H. Werner · R. Schaback

Praktische Mathematik II

Methoden der Analysis

Nach Vorlesungen an der Universität Münster,
herausgegeben mit Unterstützung von R. Runge und H. Arndt



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1972

Dr. rer. nat. Helmut Werner
o. Professor an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Dr. rer. nat. Robert Schaback
Dozent an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

AMS Subject Classifications (1970): 65-02, 65 Dxx, 65 L05, 46 N05, 41-01

ISBN 978-3-540-05928-8 ISBN 978-3-662-22311-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-22311-6

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung des Nachdruckes, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1972

Originally published by Springer-Verlag Berlin-Heidelberg New York in 1972.

Library of Congress Catalog Card Number 75-126774.

Vorwort

Der vorliegende zweite Band der Praktischen Mathematik stützt sich wie der erste Band auf Vorlesungen, die der erstgenannte der beiden Autoren an der Universität Münster gehalten hat.

Im Gegensatz zu den im ersten Band enthaltenen Methoden der linearen Algebra werden in diesem Band die numerischen Verfahren der Analysis behandelt. Zu diesen sind alle Probleme zu rechnen, die das Arbeiten mit reellen Funktionen erforderlich machen, insbesondere die Interpolation, Approximation, numerische Integration und Differentiation sowie die numerische Lösung von Differentialgleichungen. Um den Umfang dieses Bandes nicht zu sprengen, mußten die Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen und zur Lösung von Rand- und Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen unberücksichtigt bleiben. In den ausgewählten Problemkreisen wurde jedoch eine tiefere Darstellung angestrebt; so finden sich in diesem Band spezielle Abschnitte über rationale Interpolation und Approximation, Spline-Funktionen, optimale Approximation linearer Funktionale und über Stabilitätsfragen bei Differenzenverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wegen der großen praktischen Bedeutung der RICHARDSON-Extrapolation wurde besonderer Wert auf die Herleitung von asymptotischen Entwicklungen von Fehlerfunktionen gelegt.

Es war unser Bemühen, dieses Buch weitgehend vom ersten Band der Praktischen Mathematik unabhängig zu gestalten. Deshalb werden im ersten Kapitel einige Tatsachen über Interpolation in aller Kürze wiederholt. Der im letzten Kapitel dieses Buches unvermeidbare Bezug auf den Kontraktionssatz und die mit ihm zusammenhängenden Stetigkeitsaussagen ist die einzige wichtige Querverbindung zwischen den beiden Bänden. Dieser Problemkreis ist als fundamental für die Angewandte Mathematik anzusehen und sollte jedem Leser dieses Buches vertraut sein.

Es war unser Ziel, die grundlegenden Prinzipien der numerischen Analysis durchsichtig zu machen. Deshalb haben wir nicht den höchsten Grad an Allgemeinheit angestrebt, sondern gelegentlich auf die betreffende Spezialliteratur verwiesen. Gleichzeitig versuchten wir, den Leser durch Hinweise auf weiterführende Arbeiten zum eigenen Studium des Fachgebietes anzuregen; deshalb werden einige wenige Resultate ohne Beweise angegeben. Wir hoffen, daß der Leser nach Durch-

arbeiten dieses Buches in der Lage ist, sich ohne Schwierigkeiten bei einem hier nicht behandelten Problem der praktischen Mathematik in der Literatur zurechtzufinden.

Bei der Abfassung dieses Buches haben uns die Herren Dipl. Math. R. Runge und Dipl. Math. H. Arndt sehr intensiv unterstützt. In verschiedenen Stadien des Manuskriptes haben Fräulein H. Müllenmeister und Frau J. Korte beim Schreiben der Vorlage mitgewirkt. Herr H. Mecke verfertigte die Skizzen. Frau I. Schulze schrieb das endgültige Manuskript mit viel Verständnis für unsere Wünsche, Einführung in die Gestaltung des Schriftbildes und großer Geduld. Ihnen allen gilt unser aufrichtiger Dank.

Münster, im Mai 1972

H. Werner

R. Schaback

Inhaltsverzeichnis

<u>Kapitel I</u>	<u>Interpolation</u>	
	Einleitende Bemerkungen	1
§1	Polynominterpolation	2
§2	Differenzenquotienten	21
§3	Die numerische Behandlung der Interpolationsaufgabe; NEWTONsche Interpolationsformel	34
§4	TSCHEBYSCHJEFF-Systeme, Trigonometrische Interpolation	48
§5	Rationale Interpolation	58
<u>Kapitel II</u>	<u>Approximationstheorie</u>	
	Einleitende Bemerkungen	86
§1	Der Satz von WEIERSTRASS	87
§2	Der Existenzsatz für lineare Approximationen	93
§3	Approximation in euklidischen Räumen	98
§4	Diskrete lineare TSCHEBYSCHJEFF-Approximation	112
§5	Der REMES-Algorithmus	121
§6	Fehlerabschätzungen zur diskreten TSCHEBYSCHJEFF-Approximation	132
§7	Konvergenzeigenschaften von Interpolationspolynomfolgen	140
<u>Kapitel III</u>	<u>Spline-Funktionen und die Darstellung linearer Funktionale</u>	
	Einleitende Bemerkungen	154
§1	Spline-Funktionen	155
§2	Existenz und Eindeutigkeit interpolierender Spline-Funktionen und deren Approximationseigenschaft	161
§3	Berechnung interpolierender Splines	170
§4	Der Darstellungssatz für lineare Funktionale; Anwendung auf numerische Integration und Differentiation	178

§5	Beste Approximation linearer Funktionale	185
§6	Numerische Integration	190
§7	Konvergenzfragen bei der numerischen Quadratur	200
§8	Extrapolationsverfahren nach RICHARDSON mit Anwendung auf die numerische Differentiation und Integration	206
<u>Kapitel IV</u>	<u>Numerische Methoden für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen</u>	
	Einleitende Bemerkungen	219
§1	Definitionen und Aufgabenstellungen	220
§2	Existenzsätze für die Lösung des Anfangswertproblems	225
§3	Stetigkeitsbetrachtungen für Anfangswertprobleme	232
§4	Die differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen eines Anfangswertproblems von Parametern	242
§5	Lineare Differentialgleichungen und Differen- zengleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	254
§6	Einschrittverfahren	264
§7	Asymptotische Entwicklung des Fehlers beim Ein- schrittverfahren; RICHARDSON-Extrapolation	282
§8	Spezielle Mehrschrittverfahren, Prädiktor- Korrektor-Methoden	289
§9	Stabilität und Konvergenz allgemeiner Mehrschrittverfahren	302
§10	Asymptotische Entwicklung des Fehlers bei Mehrschrittverfahren	320
§11	Die Stabilitätsaussagen von DAHLQUIST	330
	Symbolverzeichnis	339
	Literaturverzeichnis	344
	Stichwortverzeichnis	347