

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungsgebiete

Band 27

Herausgegeben von

J. L. Doob · A. Grothendieck · E. Heinz · F. Hirzebruch
E. Hopf · W. Maak · S. Mac Lane · W. Magnus · J. K. Moser
M. M. Postnikov · F. K. Schmidt · D. S. Scott · K. Stein

Geschäftsführende Herausgeber

B. Eckmann und B. L. van der Waerden

D. Hilbert und W. Ackermann

Grundzüge der theoretischen Logik

6. Auflage



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1972

Geschäftsführende Herausgeber:

B. Eckmann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

B. L. van der Waerden

Mathematisches Institut der Universität Zürich

AMS Subject Classifications (1970): 02-01

ISBN 978-3-662-11933-4 ISBN 978-3-662-11932-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-11932-7

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photo-mechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1928, 1938, 1949, 1959, 1972.

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.

Softcover reprint of the hardcover 6th edition 1972

Library of Congress Catalog Card Number 72-80362.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstraße. Bindearbeiten: Konrad Tritsch,
Graphischer Betrieb, Würzburg.

Vorwort zur vierten Auflage

Für die vorliegende vierte Auflage ist der gesamte Text gründlich durchgearbeitet worden. Von kleinen Verbesserungen, Umstellungen usw. abgesehen, sind folgende Veränderungen eingetreten. Beim Aussagenkalkül ist die Begründung der Theorie der allgemeingültigen Ausdrücke durch die Bewertungstabellen, die in den vorhergehenden Auflagen nur am Rande erwähnt war, zur Grundlage des Aufbaus genommen. Als Axiomensystem für die allgemeingültigen Ausdrücke ist jetzt ein moderneres vom Gentzenschen Typ genommen, das gleichzeitig die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit ermöglicht. Ein Abschnitt über den intuitionistischen Aussagenkalkül ist hinzugefügt, ferner ein Abschnitt über eine „strenge Implikation“, letzteres hauptsächlich mit Rücksicht auf philosophische Leser. Für den Klassenkalkül ist das Entscheidungsverfahren ausführlicher dargestellt worden. Als Symbole für die Klassenverknüpfungen werden jetzt die auch in der Mathematik üblichen genommen.

Beim engeren Prädikatenkalkül ist ein Axiomensystem genommen, das die Erweiterung des für den Aussagenkalkül gebrauchten darstellt. Die axiomatische Begründung des Prädikatenkalküls mit Identität ist hinzugekommen, desgl. ein Abschnitt über die Einführung des „derjenige, welcher“ und von Funktionen. Bei dem erweiterten Prädikatenkalkül ist darauf gesehen worden, daß die Axiomatik sich als konsequente Anwendung der schon beim engeren Prädikatenkalkül vorhandenen Ansätze darstellt, die sich z. B. auf die Axiomatik mehrsortiger Theorien und die Einführung des „derjenige, welcher“ beziehen. Für den nur durch Prädikatenquantoren erweiterten Prädikatenkalkül wurden neuere Ergebnisse mitgeteilt.

Im ganzen Buch wird jetzt, im Gegensatz zu den früheren Auflagen, streng zwischen den eigentlichen Variablen des Kalküls, den semantischen Variablen und den syntaktischen Variablen unterschieden, obwohl diese termini technici nur an einer Stelle vorkommen. Entsprechend dem Wunsch aus Leserkreisen habe ich beim engeren Prädikatenkalkül die Anzahl der Beispiele, die dazu anleiten, Sätze der Umgangssprache in der Formelsprache wiederzugeben, vermehrt. Dem I. bis III. Kapitel sind ferner Übungsbeispiele beigegeben worden, an denen der Leser den Stand seiner Kenntnisse prüfen kann.

Lesern der früheren Auflagen wird es vielleicht nicht so angenehm sein, daß ich die Symbolik für die Aussageverknüpfungen und für die Quantoren geändert habe. Ich habe mich dazu nach reiflicher Überlegung entschlossen, da die bisher benutzte Hilbertsche Symbolik verschiedene Nachteile hatte. Das Zeichen „ \sim “ für die Gleichwertigkeit von Aussagen wird in der englisch-amerikanischen Literatur meist als Zeichen für die Negation gebraucht. Der Negationsstrich ist zwar an und für sich instruktiv, macht aber typographische Schwierigkeiten, wenn längere Formelbestandteile evtl. mehrfach zu überstreichen sind. Das Allzeichen „ (x) “, das auch bei WHITEHEAD und RUSSELL auftritt, könnte auch das Argument eines Prädikates bedeuten, ebenso wie „ (Ex) “ als das Zutreffen eines Prädikates „ E “ auf x aufgefaßt werden könnte. Es sind daher die früheren Zeichen „ $-$ “, „ $\&$ “, „ \sim “, „ (x) “, „ (Ex) “ durch „ $\overline{}$ “, „ \wedge “, „ \leftrightarrow “, „ $\forall x$ “, „ $\exists x$ “ ersetzt worden, wobei das Zeichen „ $\overline{}$ “ im Gegensatz zu „ $-$ “ links von dem zu negierenden Ausdruck steht. „ \vee “ und „ \rightarrow “ haben ihre Bedeutung behalten. Ich habe mich damit einer Symbolik angeschlossen, die in gleicher oder wenig veränderter Form in deutschen Publikationen über die mathematische Logik vielfach gebraucht wird.

Für die Bearbeitung dieser Auflage habe ich eine Reihe von Anregungen aus Leserkreisen verwerten können. Allen denen, die mich in dieser Weise unterstützt haben und deren Namen ich hier nicht einzeln aufzählen kann, sage ich meinen herzlichen Dank, ebenso wie dem Springer-Verlag, der wieder die gute Ausstattung des Buches ermöglichte.

Lüdenscheid, im September 1958

Wilhelm Ackermann

In der Neuauflage wurden einige sinnteststellende Druckfehler und Unstimmigkeiten beseitigt. Der Verlag dankt Herrn ELMAR EDER für einen entsprechenden Hinweis.

April 1972

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1

Erstes Kapitel

Der Aussagenkalkül

§ 1. Einführung der logischen Grundverknüpfungen	3
§ 2. Die Aussagenverknüpfungen als Wahrheitsfunktionen	6
§ 3. Einführung von Variablen; allgemeingültige Aussagenformen	9
§ 4. Äquivalenzen; Entbehrlichkeit von Grundverknüpfungen	11
§ 5. Die konjunktive und die disjunktive Normalform für Ausdrücke	15
§ 6. Das Prinzip der Dualität	19
§ 7. Mannigfaltigkeit der Aussageformen, die mit gegebenen Aussagevariablen gebildet werden können	20
§ 8. Erfüllbarkeit einer Aussageform; Folgerungen aus gegebenen Axiomen	22
§ 9. Axiomatik des Aussagenkalküls	24
*§ 10. Der intuitionistische Aussagenkalkül	30
*§ 11. Der Begriff einer strengen Implikation	36
Übungen zum ersten Kapitel	40

Zweites Kapitel

Der Klassenkalkül

§ 1. Klassenverknüpfungen und die Beziehungen zwischen Klassen	43
§ 2. Die allgemeingültigen Ausdrücke des Klassenkalküls	47
§ 3. Systematische Ableitung der traditionellen Aristotelischen Schlüsse	57
Übungen zum zweiten Kapitel	63

Drittes Kapitel

Der engere Prädikatenkalkül

§ 1. Unzulänglichkeit des bisherigen Kalküls	65
§ 2. Methodische Grundgedanken des Prädikatenkalküls.	67
§ 3. Ausdrücke und ihre Allgemeingültigkeit	73
§ 4. Ein Axiomensystem für die allgemeingültigen Ausdrücke	77
§ 5. Sätze über das Axiomensystem.	84
§ 6. Die Ersetzungsregel; Bildung des Gegenteils eines Ausdrucks; das Dualitätsprinzip	91
§ 7. Die pränex Normalform; die Skolemsche Normalform	94
§ 8. Die Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit des Axiomensystems	98
§ 9. Der Prädikatenkalkül mit Identität	104

* Die Paragraphen 10 und 11 können bei einer fortlaufenden Lektüre des Buches zunächst fortgelassen werden.

	Seite
§ 10. Axiomatik wissenschaftlicher Theorien; mehrsortiger Prädikatenkalkül; Axiomensysteme der ersten und der zweiten Stufe	111
§ 11. Das Entscheidungsproblem	119
§ 12. Der Begriff „derjenige, welcher“; Einführung von Funktionen	131
Übungen zum dritten Kapitel	137

Viertes Kapitel

Der erweiterte Prädikatenkalkül

§ 1. Erweiterung des Prädikatenkalküls durch Hinzunahme der Quantoren für Prädikatenvariable	141
§ 2. Einführung von Prädikatenprädikaten; logische Behandlung des Anzahlbegriffs	149
§ 3. Darstellung der Grundbegriffe der Mengenlehre im erweiterten Kalkül	153
§ 4. Die logischen Paradoxien	156
§ 5. Der Stufenkalkül	163
§ 6. Anwendung des Stufenkalküls	174
Literaturverzeichnis	183
Namen- und Sachverzeichnis	186