Heidelberger Taschenbücher Band 26

Hans Grauert · Ingo Lieb

Differential- und Integralrechnung I

Funktionen einer reellen Veränderlichen

Mit 25 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1967

ISBN 978-3-540-03872-6 ISBN 978-3-662-11559-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-11559-6

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1967

Catalog Card Number 67-18965
Titel-Nr. 7556

Heinrich Behnke
gewidmet

Vorwort

Das vorliegende Buch über Funktionen einer reellen Veränderlichen ist der erste Teil einer dreibändigen Darstellung der Differential- und Integralrechnung. In den folgenden Bänden sollen Funktionen mehrerer Veränderlichen, gewöhnliche Differentialgleichungen und Integrationstheorie behandelt werden.

Das Werk ist aus Vorlesungen für Studienanfänger der Mathematik und Physik hervorgegangen. Dem einführenden Charakter dieser Vorlesungen gemäß soll auch das Buch einem Leser, der keine Vorkenntnisse in höherer Mathematik besitzt, die Gelegenheit geben, einen möglichst strengen und systematischen Aufbau der Theorie der reellen Funktionen kennen zu lernen. Dementsprechend sind alle Beweise bis in die Einzelheiten hinein ausgeführt, und in den ersten Paragraphen werden wichtige Beweismethoden eigens erläutert. Dabei nehmen wir jedoch den logischen und mengentheoretischen Gesetzen gegenüber einen „naiven", d. h. nicht-axiomatischen, Standpunkt ein. Das gilt besonders für das Prinzip der vollständigen Induktion und damit auch für den Begriff der natürlichen Zahl und der Folge.

Wir geben eine Übersicht über den Inhalt des Buches.

Grundlegend ist der Begriff der reellen Zahl. Im ersten Kapitel werden die Axiome des reellen Zahlkörpers mit ihren einfachsten Folgerungen ausführlich besprochen; die unendlich fernen Punkte $+\infty$ und $-\infty$ werden axiomatisch miteingeführt.

Die nächsten beiden Kapitel sind dem Umgebungsbegriff und dem darauf fußenden Grenzwertbegriff für Folgen und Reihen gewidmet. Da wir für die Definition der Konvergenz die natürliche (uniforme) Topologie der Zahlengeraden zugrundelegen, bleibt die Konvergenz gegen $\pm\infty$ ausgeschlossen. — Die Begriffe „limes superior" und „limes inferior" sind so gefaßt, daß sie mit der Definition der halbstetigen Funktionen harmonieren.

Reelle Funktionen werden im vierten Kapitel behandelt. Vor den stetigen werden halbstetige Funktionen definiert. Dieser Funktionstyp ist in Kapitel VII für die Definition von Umgebungen im Funktionsraum wichtig und damit zur Einführung des Lebesgueschen Integrals, das in diesem Buch das unbefriedigende Riemannsche Integral ablöst.

Mit Hilfe des Stetigkeitsbegriffes können dann in Kapitel V differenzierbare Funktionen ohne Benutzung eines erneuten Grenzüberganges erklärt werden. Auf diese Weise ergeben sich wesentliche Vereinfachungen bei der Herleitung der Differentiationsregeln; außerdem überträgt sich die Definition unverändert auf allgemeinste Fälle (totale Differenzierbarkeit bei mehreren Veränderlichen, Funktionen auf topologischen Vektorräumen).

Ein besonderes Kapitel ist den Reihenentwicklungen und den elementaren Funktionen gewidmet. Die Taylorsche Formel (mit der Lagrangeschen Form des Restgliedes) wird zu einer umfassenden Interpolations- und Extrapolationsformel erweitert, auf die man sich bei den Fehlerabschätzungen im Abschnitt über numerische Integration stützen kann. — Besonderen Wert haben wir auf eine sorgfältige Diskussion der elementaren Funktionen gelegt. Es erscheint am zweckmäßigsten, sie durch ihre Potenzreihenentwicklungen einzuführen; allerdings kann an dieser Stelle, da der Integralbegriff noch nicht zur Verfügung steht und deshalb Winkel- und Längenmessung nicht möglich sind, der Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit der Geometrie nicht behandelt werden.

In Kapitel VII wird schließlich das Integral auf recht elementare Weise mit Hilfe von Treppenfunktionen definiert; wir benutzen also nicht die volle Additivität des euklidischen Maßes. Die Definition überträgt sich direkt auf Funktionen mit Werten in lokalkonvexen Vektorräumen. Zwar müssen wir auf die tieferen Sätze der Integrationstheorie in diesem Teil des Werkes noch verzichten, doch lassen sich alle Aussagen, die in einer normalen Vorlesung über das Riemannsche Integral vorkommen, beweisen. Auch Approximationsmethoden zur Berechnung von Integralen werden berücksichtigt.

Der Stoff des vorliegenden Bandes ist so begrenzt, daß man ihn in einer fünfstündigen Vorlesung des Sommersemesters oder in einer vierstündigen des Wintersemesters unterbringen kann.

Der ältere der Autoren hat in seinen ersten Semestern die überaus interessant aufgebaute und didaktisch vollendete Vorlesung über Differential- und Integralrechnung von Herrn H. Behnke gehört. Das vorliegende Buch hat dadurch viele wertvolle Impulse erhalten. Die Autoren erlauben es sich daher, ihr Buch Herrn H. Behnke zu widmen.

Göttingen, im Dezember 1966

H. Grauert
I. Lieb

Inhaltsverzeichnis