

# Springer-Lehrbuch

---

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Klaus Jänich

---

# Topologie

Siebente Auflage

Mit 182 Abbildungen



Springer

Prof. Dr. Klaus Jänich  
Universität Regensburg  
NWF I – Mathematik  
93040 Regensburg, Deutschland  
e-mail: klaus.jaenich@mathematik.uni-regensburg.de

---

Mathematics Subject Classification (2000): 54-01

---

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Jänich, Klaus:**  
Topologie / Klaus Jänich. - 7. Aufl.

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 978-3-540-41284-7      ISBN 978-3-662-10575-7 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-10575-7

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

<http://www.springer.de>

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1980, 1987, 1990, 1994, 1996, 1999, 2001  
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2001

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlagen des Autors  
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier      SPIN: 10758215      44/3142ck - 5 4 3 2 1 0

## Vorwort zur siebenten Auflage

Wie wohl jeder Autor führe ich ein Korrektorexemplar, in das ich eintrage, was in der nächsten Auflage verbessert werden könnte. So erscheint auch diese siebente Auflage wieder mit kleinen Korrekturen, derentwegen aber kein Besitzer der sechsten Auflage sein Exemplar beiseite zu legen braucht. Vorschläge für eine eventuelle achte Auflage nehme ich ab sofort entgegen!

Regensburg, im Dezember 2000

Klaus Jänich

## Vorwort zur fünften Auflage

Die Neuaufnahme des Textes in  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  zur vorigen Auflage scheint fast keine Fehler eingeschleppt zu haben, ich brauchte nur ein  $x$  in ein  $y$ , ein  $V$  in ein  $U$  und ein  $v$  in ein  $f$  zu verwandeln und ein verlorengegangenes  $\pi$  einzusetzen. Außerdem hatte ich aber eine Skizze (S. 68) zu modifizieren, die schon seit der ersten Auflage da war, gegen die aber nun ein aufmerksamer Leser einen subtilen Einwand vorgebracht hat.

Regensburg, im Juni 1996

Klaus Jänich

## Vorwort zur vierten Auflage

Dies ist die erste  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Auflage meines Topologiebuches, und ich glaube, nur wir Autoren aus der Schreibmaschinenzeit können den Segen von  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ganz erfassen, so wie vermutlich nur die Petroleumlampengeneration das elektrische Licht voll zu würdigen wußte.

Die Neuaufgabe veranlaßte mich, den ganzen Text Wort für Wort durchzugehen. Natürlich nimmt man dabei hie und da kleine Verbesserungen vor, aber im Ganzen konnte ich das Buch lassen wie es ist. Den Vorschlag, Übungen oder Tests dazu zu schreiben, habe ich erwogen, aber dann fand ich das doch mit dem

Spaziergangs-Charakter des Buches nicht recht vereinbar. Freilich muß man eine Technik einüben, um sie anwenden zu können, aber es gibt auch eine Stufe des orientierenden Kennenlernens, und dafür ist das vorliegende Buch eben gedacht.

Regensburg, am Neujahrstage 1994

Klaus Jänich

## Vorwort zur dritten Auflage

Ich freue mich, mein Buch nach zwei Auflagen als Hochschultext nun in der Springer-Lehrbuch-Reihe zu sehen. Es sei auch weiterhin allen Lesern empfohlen, die sich für eine kurze Informationsreise durch die Topologie meiner wort- und bilderreichen Führung anvertrauen mögen.

Regensburg, im August 1990

Klaus Jänich

## Vorwort zur ersten Auflage

Das Buch behandelt ungefähr den Teil der Mengentheoretischen Topologie, den ein Student, der sich nicht gerade auf dieses Gebiet spezialisieren will, denn doch beherrschen sollte. Das wäre ja nun nicht gar viel und würde, lakonisch mitgeteilt, nur ein schmales Heft füllen. Auf Lakonismus ist es aber hier nicht abgesehen, sondern auf eine lebendige Vorstellung der Ideen, auf Anschauung im direkten und im höheren Sinne.

Ich denke, daß das Buch sowohl für jüngere als auch für fortgeschrittenere Leser brauchbar sein kann, wenn auch unter jeweils verschiedenen Aspekten. Eigentlich geschrieben ist es aber für mittlere Semester, für Studenten, die ihre Zwischenexamina hinter sich haben und nun beginnen, etwas freier umherzuschauen.

Herrn B. Sagraloff schulde ich Dank für einen freundlichen Hinweis zum funktionalanalytischen Teil; und ich danke Th. Bröcker dafür, daß er sein Letztes Kapitel Mengenlehre in mein Buch gestiftet hat.

Regensburg, im April 1980

Klaus Jänich

# Inhaltsverzeichnis

|                         |   |
|-------------------------|---|
| <b>Einleitung</b> ..... | 1 |
|-------------------------|---|

## **1. Die Grundbegriffe**

|  |    |
|--|----|
| 1.1 Der Begriff des topologischen Raumes ..... | 7  |
| 1.2 Metrische Räume .....                      | 10 |
| 1.3 Unterräume, Summen und Produkte .....      | 13 |
| 1.4 Basen und Subbasen .....                   | 15 |
| 1.5 Stetige Abbildungen .....                  | 16 |
| 1.6 Zusammenhang .....                         | 18 |
| 1.7 Das Hausdorffsche Trennungsaxiom .....     | 22 |
| 1.8 Kompaktheit .....                          | 24 |

## **2. Topologische Vektorräume**

|   |    |
|---|----|
| 2.1 Der Begriff des<br>topologischen Vektorraumes ..... | 30 |
| 2.2 Endlichdimensionale Vektorräume .....               | 31 |
| 2.3 Hilberträume .....                                  | 32 |
| 2.4 Banachräume .....                                   | 33 |
| 2.5 Fréchet-Räume .....                                 | 34 |
| 2.6 Lokalkonvexe topologische Vektorräume .....         | 36 |
| 2.7 Ein paar Beispiele .....                            | 36 |

## **3. Die Quotiententopologie**

|  |    |
|--|----|
| 3.1 Der Begriff des Quotientenraumes .....   | 39 |
| 3.2 Quotienten und Abbildungen .....         | 41 |
| 3.3 Eigenschaften von Quotientenräumen ..... | 42 |
| 3.4 Beispiele: Homogene Räume .....          | 43 |
| 3.5 Beispiele: Orbiträume .....              | 47 |

|  |   |     |
|--|---|-----|
| 3.6  | Zusammenschlagen eines Teilraumes<br>zu einem Punkt ..... | 50  |
| 3.7  | Zusammenkleben von<br>topologischen Räumen .....          | 54  |
| <b>4. Vervollständigung metrischer Räume</b> |   |     |
| 4.1  | Die Vervollständigung eines<br>metrischen Raumes .....    | 62  |
| 4.2  | Vervollständigung von Abbildungen .....                   | 67  |
| 4.3  | Vervollständigung normierter Räume .....                  | 69  |
| <b>5. Homotopie</b>                          |   |     |
| 5.1  | Homotope Abbildungen .....                                | 73  |
| 5.2  | Homotopieäquivalenz .....                                 | 76  |
| 5.3  | Beispiele .....   | 77  |
| 5.4  | Kategorien .....  | 81  |
| 5.5  | Funktoren .....   | 85  |
| 5.6  | Was ist Algebraische Topologie? .....                     | 87  |
| 5.7  | Wozu Homotopie? .....                                     | 91  |
| <b>6. Die beiden Abzählbarkeitsaxiome</b>    |   |     |
| 6.1  | Erstes und Zweites Abzählbarkeitsaxiom ....               | 97  |
| 6.2  | Unendliche Produkte .....                                 | 99  |
| 6.3  | Die Rolle der Abzählbarkeitsaxiome .....                  | 101 |
| <b>7. CW-Komplexe</b>                        |   |     |
| 7.1  | Simpliziale Komplexe .....                                | 108 |
| 7.2  | Zellenzerlegungen .....                                   | 115 |
| 7.3  | Der Begriff des CW-Komplexes .....                        | 118 |
| 7.4  | Unterkomplexe .....                                       | 120 |
| 7.5  | Das Anheften von Zellen .....                             | 122 |
| 7.6  | Die größere Flexibilität<br>der CW-Komplexe .....         | 124 |
| 7.7  | Ja, aber? .....   | 126 |



---

|   |     |
|---|-----|
| <b>8. Konstruktion von stetigen Funktionen auf topologischen Räumen</b> |     |
| 8.1 Das Urysohnsche Lemma .....   | 130 |
| 8.2 Der Beweis des Urysohnschen Lemmas ....                             | 136 |
| 8.3 Das Tietzesche Erweiterungslemma .....                              | 140 |
| 8.4 Zerlegungen der Eins und<br>Schnitte in Vektorraumbündeln .....     | 142 |
| 8.5 Parakompaktheit .....   | 151 |
| <b>9. Überlagerungen</b>  |     |
| 9.1 Topologische Räume über $X$ .....                                   | 156 |
| 9.2 Der Begriff der Überlagerung .....                                  | 160 |
| 9.3 Das Hochheben von Wegen .....                                       | 163 |
| 9.4 Einleitung zur Klassifikation<br>der Überlagerungen .....           | 167 |
| 9.5 Fundamentalgruppe<br>und Hochhebeverhalten .....                    | 172 |
| 9.6 Die Klassifikation<br>der Überlagerungen .....                      | 176 |
| 9.7 Deckbewegungsgruppe und<br>universelle Überlagerung .....           | 183 |
| 9.8 Von der Rolle der Überlagerungen<br>in der Mathematik .....         | 191 |
| <b>10. Der Satz von Tychonoff</b>                                       |     |
| 10.1 Ein unplausibler Satz? .....                                       | 197 |
| 10.2 Vom Nutzen des Satzes von Tychonoff ....                           | 200 |
| 10.3 Der Beweis .....   | 207 |
| <b>11. Letztes Kapitel. Mengenlehre</b><br>(von Th. Bröcker) .....      | 212 |
| <b>Literaturverzeichnis</b> .....                                       | 219 |
| <b>Symbolverzeichnis</b> .....  | 221 |
| <b>Register</b> .....   | 224 |