Springer-Lehrbuch

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Josef Stoer Roland Bulirsch

Numerische Mathematik 2

Eine Einführung – unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F.L. Bauer

Vierte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage
Mit 26 Abbildungen

Springer

Prof. Dr. Josef Stoer
Universität Würzburg
Institut für Angewandte Mathematik und Statistik
Am Hubland
97074 Würzburg, Deutschland
e-mail: jstoer@mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Roland Bulirsch
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Arcisstr. 21
80333 München, Deutschland
e-mail: bulirsch@mathematik.tu-muenchen.de

Die 2. Auflage erschien 1978 als Band 114 der Reihe *Heidelberger Taschenbücher*

Mathematics Subject Classification (2000): 65-01, 65-02, 65B05, 65D32, 65F10, 65F15, 65F25, 65F35, 65F50, 65L05, 65L06, 65L07, 65L12, 65L15, 65L20, 65L60, 65L80, 65N22,65N30

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Numerische Mathematik: eine Einführung - unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F.L. Bauer / Josef Stoer; Roland Bulirsch.-

(Springer-Lehrbuch)
Früher u.d.T.: Einführung in die numerische Mathematik
2.-4., neu bearb. und erw. Aufl.- 2000
ISBN 978-3-540-67644-7 ISBN 978-3-662-09025-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-09025-1

Satz: Datenerstellung durch die Autoren unter Verwendung eines Springer TEX-Makropakets
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10767599 44/3142ck - 5 4 3 2 1 0

Vorwort

Die Neuauflage wurde zum Anlaß genommen, den vorliegenden Text zu verbessern und an einigen Stellen um neue Abschnitte zu ergänzen.

In Kapitel 7, das sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befaßt, wurde Abschnitt 7.2.5 um die Beschreibung einer *kontinuierlichen Runge-Kutta-Methode* erweitert: Sie liefert für die Lösung einer Differentialgleichung eine Darstellung hoher Genauigkeit auch zwischen den relativ wenigen Punkten, die von Einschrittverfahren berechnet werden.

Ein neuer Abschnitt 7.2.18 befaßt sich mit der Behandlung von *Unstetigkeiten in Differentialgleichungen,* deren Lage nicht von vorneherein bekannt ist, weil sie vom Lösungsverlauf abhängt. Probleme dieser Art treten bei Differentialgleichungen auf, die optimale Steuerungen beschreiben, in denen sich die Steuerung in Abhängigkeit von Schaltfunktionen ändert.

Viele Anwendungen (z. B. Parameteridentifizierungsprobleme) führen auf Differentialgleichungen, in denen die Differentialgleichung und die Anfangswerte, und damit auch die Lösung, von weiteren Parametern abhängen. Den Anwender interessiert, wie sensitiv die Lösung von diesen Parametern abhängt. Techniken für diese *Sensitivitätsanalyse* werden im neuen Abschnitt 7.2.19 beschrieben.

Unter den Iterationsverfahren, die man heute zur Lösung großer linearer Gleichungssysteme einsetzt, spielen *Krylovraum-Methoden* eine immer wichtigere Rolle. Diesen Methoden wird in der Neuauflage nun ein eigenes Unterkapitel 8.7 gewidmet. Wie bisher wird in ihm zunächst das bekannte cg-Verfahren dargestellt (Abschnitt 8.7.1). Hinzu kommt aber die Beschreibung von Krylovraum-Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit nicht positiv definiten Matrizen: In Abschnitt 8.7.2

stellen wir das GMRES-Verfahren von Saad und Schultz dar, das auf dem Arnoldi-Verfahren beruht. In Abschnitt 8.7.3 folgt die Beschreibung einer Grundversion des QMR-Verfahrens von Freund und Nachtigal als Beipiel einer Methode, die den Biorthogonalisierungsalgorithmus von Lanczos verwendet.

An den Arbeiten im Vorfeld der Neuauflage haben viele mitgewirkt, denen wir zu Dank verpflichtet sind: Herr Priv.-Doz. Dr. Ch. Pflaum steuerte konkrete Vorschläge zur Verbesserung des Kapitels über die iterative Lösung von linearen Gleichungssystemen bei. Herr Dipl.-Math. T. Kronseder half uns bei der Erstellung der neuen Abschnitte im Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen. Den Herren Dipl.-Math. M. Preiss und M. Wenzl danken wir für die sorgfältige und kritische Lektüre der neuen Texte.

Die umfangreichen Schreibarbeiten lagen in den kompetenten Händen von Frau W. Wrschka und Herrn J. Launer: Ihre Beherrschung von TEX ist ungewöhnlich, sie waren uns eine große Hilfe, und wir sind ihnen sehr zu Dank verpflichtet. Schließlich danken wir den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Springer-Verlages für ihre große Geduld, für tatkräftige Hilfe und die gewohnt gute Zusammenarbeit.

Würzburg, München — *J. Stoer*
Juli 2000 — *R. Bulirsch*

Inhaltsverzeichnis

6 Eigenwertprobleme 1

6.0 Einführung 1
6.1 Elementare Eigenschaften von Eigenwerten 3
6.2 Die Jordansche Normalform einer Matrix 6
6.3 Die Frobeniussche Normalform einer Matrix . . . 12
6.4 Die Schursche Normalform einer Matrix. Hermitesche und normale Matrizen, singuläre Werte von Matrizen 17
6.5 Reduktion von Matrizen auf einfachere Gestalt . . 24
6.5.1 Reduktion einer Hermiteschen Matrix auf Tridiagonalgestalt. Das Verfahren von Householder 26
6.5.2 Reduktion einer Hermiteschen Matrix auf Tridiagonalgestalt bzw. Diagonalgestalt: Die Verfahren von Givens und Jacobi 32
6.5.3 Reduktion einer Hermiteschen Matrix auf Tridiagonalgestalt. Das Verfahren von Lanczos . . 37
6.5.4 Reduktion auf Hessenberg-Gestalt 41
6.6 Methoden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren 44
6.6.1 Berechnung der Eigenwerte einer Hermiteschen Tridiagonalmatrix 45
6.6.2 Berechnung der Eigenwerte einer Hessenbergmatrix. Die Methode von Hyman 46
6.6.3 Die einfache Vektoriteration und die inverse Iteration von Wielandt 48
6.6.4 Das LR- und das QR-Verfahren 56
6.6.5 Die praktische Durchführung des QR-Verfahrens . 65
6.7 Berechnung der singulären Werte einer Matrix . . 78
6.8 Allgemeine Eigenwertprobleme 82
6.9 Eigenwertabschätzungen 84

Übungsaufgaben zu Kapitel 6 98
Literatur zu Kapitel 6 105

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen 109

7.0 Einleitung 109
7.1 Einige Sätze aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 111
7.2 Anfangswertprobleme 115
7.2.1 Einschrittverfahren. Grundbegriffe 115
7.2.2 Die Konvergenz von Einschrittverfahren 121
7.2.3 Asymptotische Entwicklungen für den globalen Diskretisierungsfehler bei Einschrittverfahren . . . 125
7.2.4 Rundungsfehlereinfluß bei Einschrittverfahren . . . 128
7.2.5 Einschrittverfahren in der Praxis 130
7.2.6 Beispiele für Mehrschrittverfahren 137
7.2.7 Allgemeine Mehrschrittverfahren 141
7.2.8 Ein Beispiel 144
7.2.9 Lineare Differenzengleichungen 147
7.2.10 Die Konvergenz von Mehrschrittverfahren 149
7.2.11 Lineare Mehrschrittverfahren 154
7.2.12 Asymptotische Entwicklungen des globalen Diskretisierungsfehlers für lineare Mehrschrittverfahren 159
7.2.13 Mehrschrittverfahren in der Praxis 163
7.2.14 Extrapolationsverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems 168
7.2.15 Vergleich der Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen 170
7.2.16 Steife Differentialgleichungen 172
7.2.17 Implizite Differentialgleichungen, Differential-Algebraische Gleichungen 179
7.2.18 Behandlung von Unstetigkeiten in Differentialgleichungen 183
7.2.19 Sensitivitätsanalyse bei Anfangswertproblemen . . 185
7.3 Randwertprobleme 187
7.3.0 Einleitung 187
7.3.1 Das einfache Schießverfahren 190
7.3.2 Das einfache Schießverfahren bei linearen Randwertproblemen 196
7.3.3 Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung von Randwertproblemen 198

7.3.4 Schwierigkeiten bei der Durchführung des einfachen Schießverfahrens 200
7.3.5 Die Mehrzielmethode 205
7.3.6 Hinweise zur praktischen Realisierung der Mehrzielmethode 209
7.3.7 Ein Beispiel: Optimales Bremsmanöver eines Raumfahrzeugs in der Erdatmosphäre (Re-entry Problem) 214
7.3.8 Der Grenzfall $m \to \infty$ der Mehrzielmethode (Allgemeines Newton-Verfahren, Quasilinearisierung) 221
7.4 Differenzenverfahren 226
7.5 Variationsmethoden 231
7.6 Vergleich der Methoden zur Lösung von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen 241
7.7 Variationsverfahren für partielle Differentialgleichungen. Die „Finite-Element"-Methode 245
Übungsaufgaben zu Kapitel 7 251
Literatur zu Kapitel 7 258

8 Iterationsverfahren zur Lösung großer linearer Gleichungssysteme, einige weitere Verfahren . . 263

8.0 Einleitung 263
8.1 Allgemeine Ansätze für die Gewinnung von Iterationsverfahren 265
8.2 Konvergenzsätze 268
8.3 Relaxationsverfahren 274
8.4 Anwendungen auf Differenzenverfahren – ein Beispiel 284
8.5 Block-Iterationsverfahren 290
8.6 Das ADI-Verfahren von Peaceman-Rachford . . . 293
8.7 Krylovraum-Methoden zur Lösung linearer Gleichungen 303
8.7.1 Das *cg*-Verfahren von Hestenes und Stiefel 304
8.7.2 Der GMRES-Algorithmus 313
8.7.3 Der Biorthogonalisierungsalgorithmus von Lanczos und das QMR-Verfahren 327
8.8 Der Algorithmus von Buneman zur Lösung der diskretisierten Poissongleichung 333

8.9 Mehrgitterverfahren 341
8.10 Vergleich der Verfahren 352
Übungsaufgaben zu Kapitel 8 357
Literatur zu Kapitel 8 365

Namen- und Sachverzeichnis 369