

Springer-Lehrbuch



Robert Schaback
Helmut Werner

Numerische Mathematik

Vierte, vollständig überarbeitete Auflage
mit 40 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Prof. Dr. Robert Schaback
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Lotzestraße 16-18
W-3400 Göttingen, FRG

Prof. Dr. Helmut Werner †

Vollständig überarbeitete Zusammenfassung des zweibändigen Lehrbuchs
„Praktische Mathematik“ erschienen als Band 1 (1982) und Band 2 (1979)
der Reihe Hochschultexte

Band 1: H. Werner: Methoden der linearen Algebra

Band 2: H. Werner, R. Schaback: Methoden der Analysis

Mathematics Subject Classification (1991): 41-XX, 46-XX, 49-XX, 65-XX

ISBN 978-3-540-54738-9 ISBN 978-3-662-09022-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-09022-0

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Schaback, Robert: Numerische Mathematik/Robert Schaback; Helmut Werner. –
4., vollst. überarb. Aufl. – Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong;
Barcelona; Budapest: Springer, 1992
(Springer-Lehrbuch)
Frühere Ausg. u. d.T.: Werner, Helmut: Praktische Mathematik

NE: Werner, Helmut:

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1992.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor
44/3140-543210 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort

Nach dem unerwartet frühen Tode meines verehrten akademischen Lehrers Helmut Werner habe ich die Aufgabe übernommen, die Neubearbeitung des inzwischen fast vergriffenen zweibändigen Lehrbuchs "Praktische Mathematik" durchzuführen.

Beide Bände habe ich von Grund auf umgearbeitet und in einem Band zusammengefaßt, so daß sich praktisch ein ganz neues Buch ergibt. Hinzugekommen sind Kapitel über lineare und nichtlineare Optimierung sowie Computer-Aided Design, und im gesamten Text wird auch auf Rechentechiken für Vektor- und Parallelrechner eingegangen. Lineare Ausgleichsrechnung, Singulärwertzerlegung, Spline-Funktionen und das Verfahren konjugierter Gradienten mit Vorkonditionierung werden ihrer heutigen Bedeutung gemäß recht ausführlich behandelt. Andererseits habe ich die numerischen Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen gestrichen, weil inzwischen das Lehrbuch "Gewöhnliche Differentialgleichungen" von H. Werner und H. Arndt erschienen ist und ich es ohnehin vorziehe, die numerische Behandlung von Differentialgleichungen in zwei getrennten Vorlesungen über Anfangs- und Randwertprobleme vertieft darzustellen.

Im übrigen wurde der Text einerseits sehr gestrafft und andererseits durch Aufgaben erweitert. Die Straffung erfolgte aus Platzgründen und erfordert leider jetzt etwas mehr Einsatz vom Leser, ermöglicht aber auch, den Stoff in zwei Semestern ohne wesentliche Kürzungen durchzunehmen. Die Aufgaben sind größtenteils nicht für den begleitenden Übungsbetrieb gedacht, sondern sollen beim Selbststudium helfen, die erworbenen Kenntnisse sofort zu überprüfen. In der Vorlesung werden sie normalerweise mit allen Details ausgeführt; bis auf wenige Ausnahmen sind sie "straightforward". Das Fehlen der Aufgaben für die parallelen Übungen bedeutet nicht, daß jene in meinen Augen unwichtig seien; sie bilden die unverzichtbare Grundlage für den praktischen Umgang mit der Theorie und der Anwendung numerischer Verfahren. Es ist daher nötig, den Text durch Übungsaufgaben lokalen Kolorits zu ergänzen, wobei nach meiner Ansicht etwa ein Drittel der Aufgaben aus Programmierübungen bestehen sollte, weil sonst keine ausreichende numerische Erfahrung erworben werden kann.

Numerische Beispielrechnungen sind auch in der Neuauflage selten, weil sie den Text sehr aufblähen und in die parallelen Übungen gehören. Auch die Ausformulierung von Algorithmen als Programme ist nach einigen anfänglichen Beispielen zurückgetreten, um nicht allzuviel Raum für diese mehr handwerklichen Dinge zu verschwenden. In Übereinstimmung mit Helmut Werner sehe ich den Schwerpunkt eines solchen Buches eindeutig auf der Seite der Mathematik und nicht der Programmieretechnik.

An vielen Hochschulen wird zur Diplom-Vorprüfung für Mathematiker und zur Diplom-Hauptprüfung für andere Fächer leider nur eine vierstündige Vorlesung aus dem Bereich der Praktischen Mathematik verlangt. Das hat zur Folge, daß viele Studierende nur den ersten Teil der Vorlesung hören und den zweiten Teil entweder ganz fallenlassen oder nach dem Vordiplom bei anderen Dozenten nachholen. Deshalb habe ich die Aufteilung des Stoffes in "Methoden der linearen Algebra" und "Methoden der Analysis" aufgegeben und das Wichtigste möglichst nach vorn gerückt (Kapitel 1 bis 11), auch wenn sich dadurch beispielsweise ergibt, daß Orthogonalpolynome und Splines an mehreren Stellen auftreten und nicht zusammenhängend behandelt werden. Wer als Dozent zwei Semester Zeit hat und nicht befürchten muß, daß ein Teil der Studierenden im zweiten Semester wegbleibt, kann beispielsweise die Eigenwertaufgaben ohne große Schwierigkeiten weiter vorn plazieren. In einer Konkurrenzsituation zu anderen Vorlesungen empfiehlt es sich ferner, gewisse Abschnitte des ersten Kapitels (insbesondere die bei Studierenden nicht beliebte Fehlertheorie) auf spätere Kapitel nach Bedarf zu verteilen, um ein vorzeitiges Abwandern eines Teils der Hörerschaft zu vermeiden.

Erfahrungsgemäß ist die Praktische Mathematik für die Studierenden oft der Einstiegspunkt in den gesamten nicht-stochastischen Teil der angewandten Mathematik. Deshalb müssen die wichtigsten Grundbegriffe der Funktionalanalysis (u.a. Normen, BANACH-Räume, FRÉCHET-Ableitung und metrische Räume) in der notwendigen Breite und Tiefe zur Darstellung kommen, auch wenn deren Anwendungsmöglichkeiten größtenteils außerhalb dieses Buches liegen und deshalb manche Passagen auf den ersten Blick recht abstrakt erscheinen. In nachfolgenden Vorlesungen hat man dann weniger Mühe mit den theoretischen Grundlagen, und der hier getriebene Aufwand zahlt sich aus.

Aus didaktischen Gründen habe ich an vielen Stellen die übliche deduktive Darstellungsweise durch eine induktive ersetzt. Das erfordert zwar etwas mehr Platz, bringt aber für den Leser die Möglichkeit, das Entstehen der Lösung zu einem Problem besser verfolgen zu können. Mathematik ist Ergebnis eines schöpferischen Prozesses, der oft hinter der seit Euklid üblichen Präsentation einer Folge fertiger Definitionen, Sätze und Beweise verschwindet. Dem ist entschieden entgegenzuwirken, und der Vorlesungsstil von Helmut Werner war in dieser Hinsicht mein Vorbild.

Die sehr umfangreichen Schreibarbeiten wurden von Petra Trapp und Christa Schrörs mit großer Sorgfalt und unendlicher Geduld in \LaTeX ausgeführt; Joachim Perske löste dabei einige schwierige Layoutprobleme. Bei der inhaltlichen Redaktion halfen Ingrid Werner, Dr. Immo Diener sowie Dr. Eberhard Schmitt. Besonders wichtig war die Mitarbeit von Dr. Helmut Weberpals an den Passagen über numerische Verfahren für Vektor- und Parallelrechner. Allen Beteiligten möchte ich hiermit herzlich danken.

Göttingen, Oktober 1991

R. Schaback

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	
1.1	Mathematisierung	2
1.2	Fehlerquellen	7
1.3	Rechenhilfsmittel	15
1.4	Digitale Rechenanlagen	17
1.5	Vektor- und Parallelrechner	20
1.6	Gleitkommazahlen und Rundungsgesetz	28
1.7	Rundungsfehleranalyse	33
1.8	Landau-Symbole	37
2	Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	
2.1	Das Eliminationsverfahren von Gauss	39
2.2	Dreieckszerlegung	44
2.3	Pivotisierung	46
2.4	Allgemeine Eliminationsverfahren	48
2.5	Das Cholesky-Verfahren	50
2.6	Das Gauss-Jordan-Verfahren	52
3	Störungsrechnung bei linearen Gleichungssystemen	
3.1	Beispiele	55
3.2	Normen	56
3.3	Kondition	63
3.4	Äquilibrierung	65
4	Orthogonalisierungsverfahren	
4.1	Orthogonale Zerlegungen	67
4.2	QR -Zerlegung durch Householder-Transformationen	68
4.3	Pivotisierung und Rangentscheidung	71
4.4	Lineare Ausgleichsrechnung	71
5	Lineare Optimierung	
5.1	Lineare Programme in Normalform	75
5.2	Polyeder und Ecken	77

5.3	Das Simplexverfahren	80
5.4	Praktische Realisierung	85
5.5	Dualität	87
6	Banachscher Fixpunktsatz	
6.1	Einfache Fixpunktiterationen	90
6.2	Metrische Räume	92
6.3	Fixpunktsatz	93
6.4	Konvergenzbeschleunigung nach Aitken	100
7	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	
7.1	Gesamt- und Einzelschrittverfahren	102
7.2	Anwendung des Fixpunktsatzes	104
7.3	Konvergenzaussagen beim Einzelschrittverfahren	105
7.4	Spektralradius	108
7.5	Unzerlegbarkeit und schwaches Zeilensummenkriterium	110
7.6	Relaxation	113
8	Newton-Verfahren	
8.1	Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen	116
8.2	Newton-Verfahren	117
8.3	Regula falsi	118
8.4	Konvergenzordnung	119
8.5	Iterationsformeln höherer Ordnung	121
8.6	Newton-Verfahren für Systeme	123
8.7	Schrittweitensteuerung	129
9	Nullstellen von Polynomen	
9.1	Auswertung von Polynomen	132
9.2	Anwendung des Newton-Verfahrens	136
9.3	Deflation	137
10	Polynominterpolation	
10.1	Die Lagrange-Interpolationsformel	139
10.2	Hermite-Interpolation	141
10.3	Das Interpolationsverfahren von Neville und Aitken	145
10.4	Optimale Stützstellenwahl	146
10.5	Differenzenquotienten	149
10.6	Newtonsche Interpolationsformel	151
10.7	Interpolation mit Spline-Funktionen	154
11	Numerische Auswertung linearer Funktionale	
11.1	Satz von Peano	161
11.2	Numerische Differentiation	166

11.3	Integrationsformeln	168
11.4	Extrapolationsverfahren nach Richardson	178
12	Rationale und trigonometrische Interpolation	
12.1	Rationale Interpolation	186
12.2	Trigonometrische Interpolation	196
13	Computer-Aided Design	
13.1	Kurven, Flächen und Transformationen	202
13.2	Bézier-Kurven	207
13.3	B -Spline-Kurven	214
13.4	Rechteckflächen	220
13.5	Dreiecksflächen	221
13.6	Übergangsbedingungen	223
14	Approximation	
14.1	Der Existenzsatz für beste Approximationen	227
14.2	Approximation in euklidischen Räumen	229
14.3	Orthogonale Funktionen	233
14.4	Der Satz von Weierstrass	240
14.5	Konvergenz von Approximationen	244
14.6	Tschebyscheff-Systeme	249
14.7	Diskrete lineare Tschebyscheff-Approximation	252
14.8	Der Remes-Algorithmus	258
15	Eigenwertaufgaben	
15.1	Transformation von Matrizen auf Hessenbergform	263
15.2	Die Eigenwerte einer Hessenbergmatrix	267
15.3	Sturmsche Ketten und das Bisektionsverfahren	270
15.4	Das Iterationsverfahren nach von Mises	275
15.5	Inverse Iteration nach Wielandt	278
15.6	Das QR -Verfahren	282
15.7	Das Jacobi-Verfahren für symmetrische Matrizen	288
15.8	Lokalisationssätze für Eigenwerte	292
16	Nichtlineare Optimierung ohne Nebenbedingungen	
16.1	Überblick	298
16.2	Verfahren konjugierter Gradienten	299
16.3	Vorkonditionierung	304
16.4	Globale Konvergenz	309
16.5	Quasi-Newton-Verfahren	312
	Literatur	317
	Sachverzeichnis	320