Tomas Gal (Hrsg.)

Mathematik zum Studieneinstieg

Grundwissen der Analysis für Wirtschaftswissenschaftler, Ingenieure, Naturwissenschaftler und Informatiker

Gabriele Piehler, Diethelm Sippel
Udo Pfeiffer

Mit 169 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Professor Dr. Tomas Gal
Dr. Gabriele Piehler
Fachbereich Wirtschaftswissenschaft, Fernuniversität
Gesamthochschule, Feithstraße 140/AVZ II, D-5800 Hagen

Stud.-Dir. Diethelm Sippel
Weg zum Poethen 99, D-5804 Herdecke

Dipl.-Math. Udo Pfeiffer
Nahestraße 13, D-4300 Essen 18

ISBN 978-3-540-50106-0 ISBN 978-3-662-08567-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-08567-7

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1988

2142/7130-543210

VORWORT

Fächer, die ohne Grundlagen der Mathematik undenkbar sind, werden an Hochschulen jeglicher Art (Technische Hochschulen, Technische Universitäten, Universitäten) angeboten. Es ist ein langjähriger Erfahrungswert dieser Hochschulen, daß ein hoher Prozentsatz der von den Gymnasien (oder mit anderen Hochschulzulassungen) an die Hochschulen kommenden Studenten ziemlich große Schwierigkeiten mit diesem Grundfach haben. Die Schwierigkeiten, dieses Fach zu bewältigen, sind manchmal so groß, daß Studenten ihr kaum angefangenes Studium lieber aufgeben und sich damit viele Zukunftschancen verbauen. Es ist keine Seltenheit, daß eine Klausur in Mathematik mindestens einmal wiederholt wird, was eine Beeinträchtigung der gesamten Studienzeit bewirken kann.

Dies alles bezieht sich auf die "Frischlinge" der Hochschulreife, die also unmittelbar nach der Erlangung der Hochschulreife auf die Hochschulen kommen. Die Schwierigkeiten mit dem Grundfach Mathematik sind u. U. noch größer bei Studienanfängern, die erst mit einem gewissen Zeitabstand (zweiter Bildungsweg z. B.) zum Entschluß gelangen, ein Fach an einer Universität/Hochschule zu studieren. Dieser Personenkreis hat mit zwei Problemen zu kämpfen: (1) Nach mehr oder minder vielen Jahren sich erneut an das Studieren zu gewöhnen und (2) Wissenslücken, die naturgemäß in einer mehrjährigen Studienpause entstehen, wieder aufzufrischen.

Lassen Sie mich gleich hier an dieser Stelle sagen, daß die genannten Schwierigkeiten (u. U. verstärkt durch eine gewisse Angst vor der Mathematik) oft nur einen scheinbaren Charakter haben. Viele Schwierigkeiten kann man nämlich relativ leicht dadurch beseitigen, daß man sich <u>vor</u> dem eigentlichen Anfang des Studiums die Grundlagen der Mathematik aneignet (oder sie wiederholt), auf denen der Stoff der "höheren Mathematik" aufbaut. Auf diese Weise wird es dann leichter, in die mathematischen Inhalte einzudringen, sie zu verstehen und damit auch erfolgreich die Prüfungen (Klausuren) zu bestehen.

Meine über 10jährige Erfahrung mit Studienanfängern an der Fernuniversität, die in ihrer überwiegenden Zahl in einem "höheren Alter" als diejenigen mit frisch erlangter Hochschulreife ihr Studium beginnen, hat gezeigt, daß ein sog. "Vorkurs der Mathematik" (oft auch <u>Brückenkurs</u> genannt) eine große Hilfe für Studienanfänger darstellt: Der Vorkurs schließt die Wissenslücken und gibt dem Studienanfänger ein sichereres Gefühl für die Bewältigung des eigentlichen Grundfaches Mathematik an der Universität. Dadurch entfallen nicht nur Angst- bzw. Unsicherheitsgefühle, auch die Erfolgsquote der in Mathematik bestandenen Klausuren erhöht sich. Nicht zuletzt profitiert der Student auf "lange Sicht", denn die im Grundstudium erworbenen Mathematikkenntnisse dienen keinem Selbstzweck (obwohl auch logisches Denken, Gedächtnistraining, Einarbeitung in das Studium schlechthin auf einem abstrakten Gebiet einen Lerneffekt haben), sondern diese Kenntnisse werden wirklich im Laufe des Hauptstudiums auch angewendet, d.h. gebraucht. Und wer "nur" die Klausur bestanden hat, ohne dabei wirkliche, dauerhafte Kenntnisse der Mathematik zu erlangen, der wird auf Schwierigkeiten in seinem späteren Hauptstudium stoßen.

Der Herausgeber und die Autoren dieses Buches haben sich viele Gedanken über das "was" und "wie" gemacht; das "warum" habe ich schon in groben Zügen beantwortet.

Um das "was" zu beantworten, d.h. bei der Auswahl der Inhalte, gingen wir zwar vom Studium der Ökonomie aus, aber wir behielten auch das Studium anderer Fächer im Auge (z. B. Ingenieurwissenschaften). Das "wie" war für uns aufgrund der Erfahrungen mit Fernstudenten im Prinzip nicht schwierig. Da für Fernstudenten im Vergleich zu "normalen", d.h.

Präsenzstudenten, die persönlichen Kontakte mit den Kommilitonen und dem Hochschulpersonal (Professoren, Assistenten) stark vermindert sind, muß das (schriftliche) Studienmaterial in geeigneter Form, nämlich für das Selbststudium, aufbereitet sein. Auch für dieses Buch haben wir das "wie" so gestaltet.

Nun zum Inhalt ("was"): Er unterteilt sich - grob - in 3 Teile. Im ersten Teil (Kapitel 1 und 2) werden grundlegende Begriffe kurz wiederholt bzw. vorgestellt. Im Teil 2 (Kapitel 3 bis 5) werden weitere Grundbegriffe, die i.a. bereits von der Schule her bekannt sind, im Hinblick auf die Anforderungen des eigentlichen Grundfaches Mathematik an der Universität neu aufgegriffen. Entsprechendes gilt für den Teil 3 (Kapitel 6 und 7), in dem die Differential- und Integralrechnung behandelt wird.

Wir haben ganz bewußt die Finanzmathematik und die Lineare Algebra nicht behandelt. Die Finanzmathematik deshalb nicht, weil sie im Grunde genommen eine Anwendung der Folgen- und Reihenlehre (Kapitel 3) darstellt. Wenn man diese Grundlagen beherrscht, so besteht nicht die geringste Schwierigkeit, die Kenntnisse der Finanzmathematik zu erwerben; es gibt dafür genügend spezialisierte Lehrbücher. Die Lineare Algebra (Vektoren- und Matrizenrechnung) haben wir nicht behandelt, denn unseres Erachtens ist es ein selbständiges Gebiet, das man mit den Grundkenntnissen aus dem Vorkurs gut an der Hochschule verfolgen und sich aneignen kann. Außerdem sind die Anforderungen an die Lineare Algebra von Fach zu Fach verschieden, und es wäre praktisch unmöglich, eine Auswahl zu treffen, welche Teile der Linearen Algebra betrachtet werden sollen und welche nicht. So wird z. B. ein Vektor in der Physik (und in den Ingenieurwissenschaften) ganz anders interpretiert als z. B. in der Ökonomie.

Lassen Sie mich nun zum "wie" noch folgendes sagen: In jedem Kapitel wird der Stoff anhand einfacher, auf einem ökonomischen oder physikalischen Hintergrund aufgebauter Beispiele eingeführt. Diese vereinfachte, beispielhafte Darstellung wird dann sukzessive präzisiert und noch mit illustrativen (numerischen) Beispielen aufgelockert. Zu jedem Wissensabschnitt werden Aufgaben gestellt, die dem Leser eine Selbstkontrolle über das Beherrschen des bislang Gelernten ermöglichen.

Die Richtigkeit der eigenhändig erstellten Lösungen kann anhand der "Lösungen zu den Aufgaben" kontrolliert werden. Es ist zu empfehlen, im Falle eines Mißerfolges beim Lösen von Aufgaben ("meine" Lösung stimmt nicht mit der angeführten überein) nicht weiterzugehen, sondern sich der Fehlersuche zu widmen: Entweder wurde der Abschnitt noch nicht in allen Konsequenzen begriffen (Wiederholung!) oder es hat sich während der Berechnungen ein numerischer Fehler eingeschlichen (dies ist kein Beinbruch, wenn man das wesentliche verstanden hat) oder - Gott behüte! - es liegt ein Druckfehler vor. (Dies bitten wir schon von vornherein zu entschuldigen, denn es gibt auf der ganzen Welt kein Buch, das in seiner Erstauflage fehlerfrei ist; wir wären sogar sehr dankbar, wenn uns solche Unzulänglichkeiten im Buch angezeigt würden.)

Lassen Sie mich in eigener Sache noch bemerken, daß eine Weiterführung der besprochenen Vorgehensweise des "wie" (Beispiel mit Hintergrund, Präzisierung) in dem 3-bändigen Lehrbuch "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" (gleicher Herausgeber, im gleichen Verlag (1983)) zu finden ist. Hier ist zusätzlich jedes Kapitel in zwei Teile unterteilt: im ersten Teil wird der Stoff anhand einfacher Beispiele besprochen, um im zweiten Teil den gleichen Stoff präzise zu behandeln.

Am Ende dieses zu lang geratenen Vorwortes möchte ich mich als Herausgeber bei einigen Personen ganz aufrichtig bedanken: Bei Frau Dr. G.

Piehler für ihre neben ihren Autorinnenpflichten durchgeführte organisatorische Hilfe, Frau I. Krause für die schier unendlich scheinende Geduld beim Tippen, Korrigieren, Tippen, Korrigieren ... des Manuskriptes, und Herrn Dr. W. A. Müller vom Springer Verlag für die Geduld, mit der er unsere (fast) ewigen Aufschübe bezüglich der Abgabe des fertigen Manuskripts ertragen hat.

Es bleibt mir, auch im Namen der Autoren, nur noch, dem Leser zu wünschen, daß ihm das vorliegende Buch bei der Überwindung seiner eventuellen Schwierigkeiten mit der "Mathe" hilft, und daß er aufgrund dieses Buches viele Erfolgserlebnisse mit der "eigentlichen Mathematik" und mit quantitativen Fächern des von ihm gewählten Studienfaches haben wird.

Univ.-Prof. Dr. Dr. Tomas Gal

Der Herausgeber

HINWEIS:

Innerhalb der Abschnitte wurde eine fortlaufende Numerierung für Bemerkungen, Beispiele, Definitionen, Regeln und Sätze verwendet. So ist z. B. im Abschnitt 6.3: 6.3.1 eine Definition, 6.3.2 eine Bemerkung, 6.3.3 ein Beispiel.

Die Numerierung wurde am linken Rand ergänzt durch

D für Definition,

R für Regel

S mathematischen Lehrsatz

Abbildungen (Figuren) und Tabellen wurden unabhängig von dieser Numerierung abschnittsweise fortlaufend numeriert.

Die Aufgaben sind kapitelweise fortlaufend numeriert (Nummern ohne Zusatz).

INHALTSVERZEICHNIS

SYMBOLVERZEICHNIS

AUSSAGENLOGIK/MENGENLEHRE

$A \wedge B$	A und B (oder: Konjunktion)
$A \vee B$	A oder B oder beides (oder: Disjunktion)
$\neg A$	nicht A (oder: Negation)
$A(x)$, $B(x)$	Aussageformen
$A(x) \Rightarrow B(x)$	Aus A(x) folgt B(x) (oder Implikation)
$A(x) \Leftrightarrow B(x)$	A(x) gilt genau dann, wenn B(x) gilt (oder: logische Äquivalenz)
$x \leqq y$ (bzw. $x \geqq y$)	x ist kleiner (bzw. größer) oder gleich y
$x < y$ (bzw. $x > y$)	x ist echt kleiner (bzw. größer) y
$x = y$ (bzw. $x \neq y$)	x ist gleich (bzw. ungleich) y
$[x, y]$ bzw. (x, y)	Abgeschlossenes bzw. offenes Intervall
$[x, y)$, $(x, y]$	Halboffene Intervalle
( )	Runde Klammern bei Punkten, offenen Intervallen und geordneten Paaren
[ ]	Eckige Klammern bei abgeschlossenen Intervallen
{ }	Geschweifte Klammern bei Mengen
IN (bzw. IN_0)	Menge der natürlichen Zahlen (bzw. einschließlich der Null)
IZ	Menge der ganzen Zahlen
IQ	Menge der rationalen Zahlen
IR (bzw. IR_+)	Menge der reellen (bzw. positiven reellen) Zahlen
IC	Menge der komplexen Zahlen
$x \in M$ (bzw. $x \notin M$)	x ist (bzw. ist nicht) Element von M
$\{x \mid x \in M\}$	Die Menge aller x, für die $x \in M$ gilt
$\{x \in M \mid \ldots\}$	Die Menge aller x aus M, für die ... gilt
$\emptyset$	Leere Menge
$A \subset B$ (bzw. $A \not\subset B$)	A ist (bzw. ist keine) Teilmenge von B

$A \subsetneqq B$	A ist echte Teilmenge von B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge (oder: A vereinigt mit B)
$A \cap B$	Schnittmenge (oder: A geschnitten mit B)
$A \setminus B$	Differenzmenge (oder: A ohne B)
CA	Komplementärmenge (oder: Komplement) von A
$A \times B$	Kartesisches Produkt (oder: A kreuz B)
(a, b)	Geordnetes Paar

FOLGEN UND REIHEN

$j = 1, \ldots, n$	Der Index j läuft von 1 bis n
$(a_n)_{n \in IN}$ oder (a_n)	Folge der (reellen) Zahlen a_n, $n \in IN$
$\sum\limits_{j=k}^{n}$	Summe über j von k bis n [z. B. $\sum\limits_{j=3}^{5} a_j = a_3 + a_4 + a_5$]
$\prod\limits_{j=k}^{n}$	Produkt über j von k bis n
$n!$	n-Fakultät, $n! = \sum\limits_{j=1}^{n} j$
$U_\varepsilon(x)$	ε-Umgebung des Punktes x

FUNKTIONEN EINER VARIABLEN

D_f	Definitonsbereich einer Funktion f
W_f	Wertebereich einer Funktion f
$f : D_f \to IR$ oder $y = f(x)$, $x \in D_f$, $y \in IR$	Funktion, definiert auf der Menge D_f mit Werten in IR
$f^{-1}(y)$	Urbildmenge von $y \in W_f$
f^{-1}	Umkehrfunktion von f
$id(x)$	Identität: $id(x) = x$
$sgn\ x$	Vorzeichen- oder Signumfunktion
$[x]$	Gaußsche Klammerfunktion

$\lvert x \rvert$	Absolut- oder Betragsfunktion
$P_n(x)$	Polynom n-ten Grades
$R(x)$	rationale Funktionen
a^x	Exponentialfunktion (zur Basis a)
e^x	natürliche Exponentialfunktion
$\log_a x$	Logarithmusfunktion (zur Basis a)
$\ln x$	natürliche Logarithmusfunktion
$\lg x$ oder $\log x$	dekadische Logarithmusfunktion
$\pi \approx 3{,}14$	π ist ungefähr gleich 3,14
$\sin x$	Sinusfunktion
$\cos x$	Kosinusfunktion
$\tan x$	Tangensfunktion
$\cot x$	Kotangensfunktion
$\arcsin x$	Umkehrfunktion zur Sinusfunktion
$\arccos x$	Umkehrfunktion zur Kosinusfunktion
$\arctan x$	Umkehrfunktion zur Tangensfunktion
$\operatorname{arccot} x$	Umkehrfunktion zur Kotangensfunktion
$\sup\limits_{x \in A} f(x)$	Supremum von f auf A
$\inf\limits_{x \in A} f(x)$	Infimum von f auf A
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	Grenzwert von f für x gegen ∞
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Grenzwert von f für x gegen x_0
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$	rechtsseitiger Grenzwert
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$	linksseitiger Grenzwert

DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN EINER VARIABLEN

Δx	Differenz $(x - x_0)$
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	Differenzenquotient

$f', y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$	Ableitung von $y = f(x)$
$f'(x_0), \left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=x_0}$ oder	Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$
$\left.\frac{df}{dx}\right\vert_{x=x_0}, \left.\frac{df(x)}{dx}\right\vert_{x=x_0}$	
$D_{f'}$	Differenzierbarkeitsbereich von f
f'', y''	2. Ableitung von $y = f(x)$
$f^{(k)}, y^{(k)}, \frac{d^kf}{dx^k}, \frac{d^ky}{dx^k}$	k-te Ableitung von $y = f(x)$
$f^{(0)} = f$	0-te Ableitung von f
dy	Differential von $y = f(x)$ an einer Stelle x_0

INTEGRALRECHNUNG

$\int_a^b f(x)dx$	bestimmtes Integral von f über [a, b]
$\int f(x)dx$	unbestimmtes Integral von f
$F(x)\Big\vert_a^b$	Differenz $F(b) - F(a)$ der Stammfunktion $F(x)$