

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Mathematik für Ingenieure mit Maple

Band 1:

Differential- und Integralrechnung für Funktionen
einer Variablen, Vektor- und Matrizenrechnung,
Komplexe Zahlen, Funktionenreihen

2. Auflage

Mit 300 Abbildungen, 262 Aufgaben und Lösungen



Springer

Professor Dr. Thomas Westermann

Fachbereich Naturwissenschaften

Fachhochschule Karlsruhe

Hochschule für Technik

Postfach 24 40

76012 Karlsruhe

E-mail: westermann@fh-karlsruhe.de

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>

ISBN 978-3-540-67450-4 ISBN 978-3-662-08559-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-08559-2

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Mathematik für Ingenieure mit Maple/Thomas Westermann. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Singapur; Tokio: Springer
(Springer-Lehrbuch)

Bd. 1. Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Variablen, Vektor- und Matrizenrechnung, komplexe Zahlen, Funktionenreihen. - 2. Aufl. - 2000

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2001.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage des Autors

Einband: design & production, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10767167 62/3020ra - 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur 2. Auflage

Die positiven und ermutigenden Zuschriften haben uns bewogen, das Konzept, die Darstellung sowie die Inhalte für diese Neuauflage nahezu unverändert zu belassen. Allerdings wurden zahlreiche MAPLE-Ausarbeitungen ergänzt, Visualisierungen neu erstellt und sämtliche MAPLE-Beschreibungen an MAPLE6 angepaßt. Textverbesserungen wurden vorgenommen, weitere Anwendungsbeispiele eingefügt und Druckfehler beseitigt. Der Grundidee folgend, mathematische Begriffe zu visualisieren, um sie greifbarer zu machen, und den interaktiven Gebrauch des Buches zu fördern, wurde die CD-ROM völlig neu und benutzerfreundlicher gestaltet.

Um zukünftig mit neuen MAPLE-Versionen Schritt halten zu können, werden Updates der elektronischen Arbeitsblätter (Worksheets) unter

<http://www.fh-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/band1/start.htm>

unter der Angabe des Paßwortes (ISBN-Nummer dieses Buches) abrufbar sein.

Mein Dank gilt M. Hainz, der die Worksheets neu gestaltet hat, sowie Scientific Computers, die mir MAPLE6 zur Verfügung gestellt haben.

Karlsruhe, im Juni 2000

Thomas Westermann

Vorwort zur 1. Auflage

Dieses zweibändige Lehrbuch entstand aus Vorlesungen und Übungen zur Mathematik und Physikalischen Simulation für Ingenieure des Studienganges Sensorsystemtechnik an der Fachhochschule Karlsruhe. Es wendet sich aber an alle Studenten der Natur- und Ingenieurwissenschaften, da auch Themengebiete einbezogen sind, die nicht bzw. nicht in der vorliegenden Tiefe in der Vorlesung behandelt wurden.

Die Themengebiete sind so aufbereitet, daß Studenten sie auch im Selbststudium leicht bearbeiten können. Im ersten Band sind mehr als 450 Beispiele ausführlich durchgerechnet und zusätzlich 260 Aufgaben mit Lösungen angegeben. Wichtige Formeln und Lehrsätze werden deutlich hervorgehoben, um die Lesbarkeit des Buches zu erhöhen. Mehr als 300 Abbildungen und Skizzen tragen dem Lehrbuchcharakter Rechnung.

Die stürmische Entwicklung von Computersoftware im Bereich der Mathematik erfordert eine Erweiterung der Ingenieur-Ausbildung, indem nicht nur praxisorientiertes mathematisches Wissen, sondern auch das Rüstzeug vermittelt wird, mit diesen Systemen erfolgreich arbeiten zu können. Die Computeralgebra-Systeme haben den mathematischen Alltag eines Ingenieurs grundlegend erweitert und be-

reichert. Sie werden zum numerischen Rechnen genauso verwendet wie zum Rechnen mit Formeln sowie der graphischen Darstellung komplizierter Sachverhalte. Die Rechentechnik tritt in den Hintergrund; die interessante Modellierung und das systematische Vorgehen gewinnt an Bedeutung. In diesem Lehrbuch wird dieser neue spannende Aspekt aufgegriffen und das Computeralgebra-System MAPLE in die Mathematikausbildung mit einbezogen.

Mathematische Begriffe werden anschaulich motiviert, systematisch anhand praxisbezogener Beispiele verdeutlicht und mit MAPLE umgesetzt, was sich in vielen Animationen niederschlägt. Auf mathematische Beweise wird fast gänzlich verzichtet und einer anschaulich prägnanten Sprechweise den Vorzug gegenüber einer mathematisch exakten Formulierung gegeben.

Um den ständig wachsenden Gebrauch von Rechnern und numerischen Problemlösungen zu berücksichtigen, wurden zwei Kapitel zur rechnerischen Lösung von Standard-Problemen in dieses Mathematikbuch aufgenommen. Die numerischen Algorithmen sind als Pascal-Quellprogramme auf der beigelegten CD-ROM enthalten, können aber von etwas geübten Programmierern leicht in jede andere höhere Sprache umgesetzt werden.

Obwohl die unterschiedlichen Stadien der Manuskripte oftmals Korrektur gelesen wurden, lassen sich Fehler bei der Abfassung eines umfangreichen Textes nicht vermeiden. Über Hinweise auf noch vorhandene Fehler ist der Autor dankbar. Aber auch Verbesserungsvorschläge, nützliche Hinweise und erfrischende Anregungen besonders von studentischen Kreisen sind sehr erwünscht und können dem Autor z.B. über westermann@fh-karlsruhe.de oder per Post zugesendet werden.

Das vorliegende Buch wurde vollständig in \LaTeX unter dem Textverarbeitungsprogramm *Scientific WorkPlace* erstellt. Ohne die engagierte Mithilfe und Mitarbeit vieler bereitwilliger Helfer wäre das Buch in seiner vorliegenden Form nicht möglich gewesen. Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn F. Wohlfarth und Frau Raviol für die präzise und fehlerfreie Erstellung des \LaTeX -Quelltextes mit all den vielen Formeln, den Herren M. Baus und F. Loeffler für die exzellente Erstellung der meisten Skizzen und Bilder unter CorelDraw, so wie der Autor sie sich vorgestellt hat, und dem teilweise mühevollen Einbinden auch der MAPLE-Bilder in das \LaTeX -System sowie Herrn A. Käpplein für die Bereitstellung des \LaTeX -Styles. Mein Dank gilt auch dem Springer-Verlag für die angenehme und reibungslose Zusammenarbeit, speziell Herrn Dr. Merkle.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie (Ulrike, Veronika, Juliane) bedanken, die mit viel Verständnis meine Arbeit an diesem Buch mitgetragen und tatkräftig unterstützt hat.

Hinweise zum Gebrauch dieses Buches

Das gesamte Werk ist in zwei Bände und jeder Band in einzelne Kapitel aufgeteilt. Die Kapitel fassen mehrere Aspekte einer Thematik zusammen. Nicht immer ließ es sich vermeiden, Teilergebnisse aus späteren Kapiteln vorwegzunehmen und zu verwenden. Dem didaktischen Anliegen, Themenbereiche geschlossen in einem Block zu bearbeiten, wurde dabei stärkere Priorität als der mathematischen Strenge beigemessen. Die Reihenfolge innerhalb eines Vorlesungszyklus muß sich nicht an die im Buch gewählte Reihenfolge halten, einzelne Kapitel können auch aufgesplittet werden.

Neu eingeführte Begriffe werden *kursiv* im Text markiert und zumeist in einer Definition **fett** spezifiziert. Lehrsätze, wichtige Formeln und Zusammenfassungen sind durch Umrahmungen besonders gekennzeichnet.

Dieses Buch ist ein Lehrbuch über Mathematik und kann ohne Rechner zum Erlernen von mathematischem Grundwissen oder zur Prüfungsvorbereitung herangezogen werden. Um den vollen Umfang und die ganze Schönheit der Mathematik und der Anwendungen zu erleben, sind die Animationen und Ausarbeitungen mit dem Computeralgebra-System MAPLE unverzichtbar. Nur wenn eine Animation als Animation erlebt wird, kommt die volle Erkenntnis zum Tragen. Dieses Buch kann auch als eine themengebundene Einführung in die Anwendung von MAPLE in der Mathematik gesehen werden, da sämtliche Themengebiete des Buches mit MAPLE bearbeitet werden. Alle MAPLE-Befehle sind im Text **fett** hervorgehoben; die MAPLE-Syntax erkennt man an der Eingabeaufforderung ">" zu Beginn einer Zeile. Diese MAPLE-Zeilen sind im Textstil **sans serif** angegeben und können direkt in MAPLE eingegeben werden. Die MAPLE-Ausgabe erscheint im Formelmodus. Somit wurde versucht das MAPLE-Konzept auch optisch in das Lehrbuch zu integrieren, ihm aber dennoch ein MAPLE-spezifisches Aussehen zu geben, wie es unter der Windows-Oberfläche erscheint.

Alle Übungsaufgaben sind soweit nicht speziell gekennzeichnet mit den Hilfsmitteln der einzelnen Paragraphen zu bearbeiten, sie sind aber auch gleichzeitig Aufgaben, die mit MAPLE gelöst werden können.

Alle MAPLE-Ausarbeitungen sind auf der CD-ROM als elektronische Arbeitsblätter (Worksheets) enthalten, so daß der interessierte Leser die im Text entwickelten Methoden umsetzen bzw. an abgeänderten Beispielen erproben kann. Es wird besonders auf die vielen Animationen und Prozeduren hingewiesen, welche die elementaren Begriffe visualisieren und die mathematischen Zusammenhänge aufzeigen.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Kapitel I: Zahlen, Gleichungen und Gleichungssysteme | 1 |
| §1. Mengen | 1 |
| §2. Natürliche Zahlen | 4 |
| 2.1 Peanosche Axiome | 4 |
| 2.2 Vollständige Induktion | 5 |
| 2.3 Geometrische Summenformel | 8 |
| 2.4 Permutationen | 9 |
| 2.5 Der binomische Lehrsatz | 9 |
| §3. Mathematische Beweismethoden | 11 |
| §4. Reelle Zahlen | 13 |
| 4.1 Zahlenmengen und Operationen | 13 |
| 4.2 Die Rechengesetze für reelle Zahlen | 14 |
| 4.3 Potenzrechnen | 16 |
| 4.4 Logarithmen | 17 |
| 4.5 Anordnung der reellen Zahlen | 18 |
| §5. Gleichungen und Ungleichungen mit MAPLE | 20 |
| 5.1 Gleichungen | 20 |
| 5.2 Ungleichungen | 23 |
| §6. Lineare Gleichungssysteme | 24 |
| 6.1 Ein Einführungsbeispiel | 24 |
| 6.2 Begriffsbildung und Notation | 26 |
| 6.3 Das Lösen von linearen Gleichungssystemen | 27 |
| §7. Lösen von linearen Gleichungssystemen mit MAPLE | 33 |
| Zusammenstellung der MAPLE-Befehle | 36 |
| Aufgaben zu Kapitel I | 38 |
| Kapitel II: Vektorrechnung | 41 |
| §1. Vektoren im \mathbb{R}^2 | 42 |
| 1.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar | 42 |
| 1.2 Addition zweier Vektoren | 43 |
| 1.3 Die Länge (der Betrag) eines Vektors | 43 |
| 1.4 Das Skalarprodukt zweier Vektoren | 45 |
| 1.5 Geometrische Anwendung | 47 |
| §2. Vektoren im \mathbb{R}^3 | 50 |
| 2.1 Rechenregeln für Vektoren | 50 |
| 2.2 Projektion eines Vektors | 53 |
| 2.3 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren | 54 |
| 2.4 Das Spatprodukt von drei Vektoren | 58 |
| §3. Vektorrechnung mit MAPLE | 60 |
| §4. Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3 | 63 |
| 4.1 Vektorielle Darstellung von Geraden | 63 |
| 4.2 Lage zweier Geraden zueinander | 64 |

| | | |
|--|--|------------|
| 4.3 | Abstandsberechnung zu Geraden | 66 |
| 4.4 | Vektorielle Darstellung von Ebenen | 69 |
| 4.5 | Lage zweier Ebenen zueinander | 71 |
| 4.6 | Abstandsberechnung zu Ebenen | 73 |
| 4.7 | Berechnung des Schnittes einer Geraden mit einer Ebene | 75 |
| §5. | Punkte, Geraden und Ebenen mit MAPLE | 77 |
| 5.1 | Definition der geometrischen Objekte | 77 |
| 5.2 | Beziehungen von geometrischen Objekten zueinander | 79 |
| 5.3 | Die MAPLE-Prozedur geomet | 83 |
| §6. | Vektorräume | 85 |
| 6.1 | Vektorrechnung im \mathbb{R}^n | 85 |
| 6.2 | Vektorräume | 87 |
| 6.3 | Linearkombination und Erzeugnis | 90 |
| 6.4 | Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit | 92 |
| 6.5 | Basis und Dimension | 95 |
| | Zusammenstellung der MAPLE-Befehle | 99 |
| | Aufgaben zu Kapitel II | 100 |
| Kapitel III: Matrizen und Determinanten | | 106 |
| §1. | Matrizen | 106 |
| 1.1 | Einführung, spezielle Matrizen | 106 |
| 1.2 | Rechenoperationen für Matrizen | 108 |
| 1.3 | Inverse Matrix | 111 |
| 1.4 | Das Matrizenrechnen mit MAPLE | 115 |
| 1.5 | Lineare Abbildungen | 118 |
| 1.6 | Anwendungsbeispiele | 119 |
| §2. | Determinanten | 122 |
| 2.1 | Einführung | 122 |
| 2.2 | Rechenregeln für zweireihige Determinanten | 123 |
| 2.3 | n -reihige Determinanten | 125 |
| 2.4 | Anwendungen von Determinanten | 129 |
| §3. | Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen | 131 |
| 3.1 | Lineare Gleichungssysteme, Rang | 131 |
| 3.2 | Anwendungen | 136 |
| | Zusammenstellung der MAPLE-Befehle | 140 |
| | Aufgaben zu Kapitel III | 142 |
| Kapitel IV: Elementare Funktionen | | 145 |
| §1. | Grundbegriffe und allgemeine Funktionseigenschaften | 145 |
| 1.1 | Grundbegriffe | 145 |
| 1.2 | Elementare Funktionen in MAPLE | 149 |
| 1.3 | Allgemeine Funktionseigenschaften | 155 |
| §2. | Polynome | 163 |
| 2.1 | Festlegung von Polynomen durch Wertepaare | 164 |

| | | |
|--|--|------------|
| 2.2 | Koeffizientenvergleich | 165 |
| 2.3 | Teilbarkeit durch einen Linearfaktor | 166 |
| 2.4 | Nullstellenproblem | 167 |
| 2.5 | Interpolationspolynome mit dem Newton-Algorithmus | 170 |
| 2.6 | Polynome mit MAPLE | 173 |
| §3. | Rationale Funktionen | 177 |
| 3.1 | Rationale Funktionen | 177 |
| 3.2 | Anwendung: Übertragungsfunktion bei LC-Kreisen. | 181 |
| 3.3 | Rationale Funktionen mit MAPLE | 182 |
| §4. | Potenz- und Wurzelfunktionen | 185 |
| §5. | Exponential- und Logarithmusfunktion | 187 |
| 5.1 | Exponentialfunktion | 187 |
| 5.2 | Logarithmusfunktion | 189 |
| §6. | Trigonometrische Funktionen | 192 |
| 6.1 | Grundbegriffe | 192 |
| 6.2 | Sinus- und Kosinusfunktion | 192 |
| 6.3 | Tangens- und Kotangensfunktion | 197 |
| 6.4 | Arkusfunktionen | 199 |
| | Zusammenstellung der Vereinfachungsbefehle von MAPLE | 205 |
| | Aufgaben zu Kapitel IV | 206 |
| Kapitel V: Die komplexen Zahlen | | 209 |
| §1. | Darstellung komplexer Zahlen | 210 |
| 1.1 | Algebraische Normalform | 210 |
| 1.2 | Trigonometrische Normalform | 212 |
| 1.3 | Exponentielle Normalform | 212 |
| 1.4 | Umformungen der Normalformen | 213 |
| 1.5 | Komplexe Zahlen mit MAPLE | 215 |
| §2. | Komplexe Rechenoperationen | 217 |
| 2.1 | Addition | 218 |
| 2.2 | Subtraktion | 218 |
| 2.3 | Multiplikation | 219 |
| 2.4 | Division | 221 |
| 2.5 | Potenz | 223 |
| 2.6 | Wurzeln | 224 |
| 2.7 | Fundamentalsatz der Algebra | 226 |
| §3. | Komplexe Rechnung mit MAPLE | 227 |
| §4. | Anwendungen | 229 |
| §5. | Übertragungsfunktion für RCL-Filterschaltungen | 242 |
| 5.1 | Übertragungsfunktion für lineare Ketten | 246 |
| 5.2 | Beispiele | 250 |
| 5.3 | Dimensionierung von Hoch- und Tiefpässen | 254 |
| | Aufgaben zu Kapitel V | 259 |

| | |
|--|------------|
| Kapitel VI: Differential- und Integralrechnung | 262 |
| §1. Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion | 262 |
| 1.1 Reelle Zahlenfolgen | 262 |
| 1.2 Funktionsgrenzwert | 268 |
| 1.3 Stetigkeit einer Funktion | 273 |
| §2. Differentialrechnung | 276 |
| 2.1 Einführung | 276 |
| 2.2 Rechenregeln bei der Differentiation | 282 |
| 2.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik | 295 |
| 2.4 Differential einer Funktion | 298 |
| 2.5 Anwendung der Differentialrechnung in der Mathematik | 303 |
| 2.6 Extremwertaufgaben (Optimierungsprobleme) | 310 |
| 2.7 Sätze der Differentialrechnung | 315 |
| 2.8 Spektrum eines strahlenden schwarzen Körpers | 320 |
| §3. Integralrechnung | 323 |
| 3.1 Das Riemann-Integral | 323 |
| 3.2 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung | 329 |
| 3.3 Grundregeln der Integralrechnung | 338 |
| 3.4 Integrationsmethoden | 340 |
| 3.5 Uneigentliche Integrale | 357 |
| 3.6 Anwendungen der Integralrechnung | 360 |
| Zusammenstellung der MAPLE-Befehle | 379 |
| Aufgaben zu Kapitel VI | 380 |
| Kapitel VII: Funktionenreihen | 386 |
| §1. Zahlenreihen | 388 |
| 1.1 Beispiele | 390 |
| 1.2 Konvergenzkriterien | 395 |
| §2. Potenzreihen | 401 |
| §3. Taylorreihen | 410 |
| §4. Taylorreihen mit MAPLE | 420 |
| §5. Anwendungen | 423 |
| 5.1 Näherungspolynome einer Funktion | 423 |
| 5.2 Integration durch Potenzreihenentwicklung | 429 |
| §6. Komplexwertige Funktionen | 431 |
| 6.1 Komplexe Potenzreihen | 431 |
| 6.2 Die Eulersche Formel | 433 |
| 6.3 Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion | 434 |
| 6.4 Komplexe Hyperbelfunktionen | 436 |
| 6.5 Differentiation und Integration | 437 |
| Zusammenstellung der MAPLE-Befehle | 440 |
| Aufgaben zu Kapitel VII | 441 |

| | |
|---|------------|
| Kapitel VIII: Numerisches Lösen von Gleichungen | 444 |
| §1. Intervallhalbierungs-Methode | 446 |
| §2. Pegasus-Verfahren | 452 |
| §3. Banachsches Iterationsverfahren | 455 |
| §4. Newton-Verfahren | 468 |
| §5. Regula falsi | 473 |
| §6. Bestimmung von Polynom-Nullstellen | 474 |
| Aufgaben zu Kapitel VIII | 477 |
| | |
| Kapitel IX: Numerische Differentiation und Integration | 478 |
| §1. Numerische Differentiation | 478 |
| 1.1 Differenzenformeln für die erste Ableitung | 478 |
| 1.2 Differenzenformeln für die zweite Ableitung | 485 |
| 1.3 Differenzenformeln für die n -te Ableitung | 486 |
| §2. Numerische Integration | 487 |
| 2.1 Die Rechteckregel | 488 |
| 2.2 Die Trapezregel | 490 |
| 2.3 Die Simpson-Regel | 491 |
| Zusammenstellung der MAPLE-Befehle | 493 |
| Aufgaben zu Kapitel IX | 494 |
| | |
| Anhang A: Lösungen zu den Übungsaufgaben | 495 |
| | |
| Anhang B: Einführung in MAPLE | 507 |
| | |
| Anhang C: Die CD-ROM | 517 |
| | |
| Literaturverzeichnis | 521 |
| | |
| Index | 523 |
| | |
| Verzeichnis der MAPLE-Befehle | 533 |

Inhalt von Band 2

- Kapitel X:** **Funktionen von mehreren Variablen**
Partielle Differentiation, Satz von Taylor,
Gradient, Richtungsableitung,
Lokale Extrema, Ausgleichsrechnung,
Integration, Linien- und Kurvenintegrale.
- Kapitel XI:** **Gewöhnliche Differentialgleichungen**
DG 1. Ordnung,
Lineare DG-Systeme, Eigenwerttheorie,
Lineare DG n.-ter Ordnung,
Numerisches Lösen von DG.
- Kapitel XII:** **Laplace-Transformation**
Laplace-Transformation, Sätze der LT,
Lösen von DG mit der LT.
- Kapitel XIII:** **Fourierreihen**
 2π - und p -periodische Funktionen,
Komplexe Fourierreihen.
- Kapitel XIV:** **Fouriertransformation**
Fouriertransformation, Sätze der FT,
Deltafunktion, LZK-Systeme, DFT,
Anwendung der DFT in der Systemtheorie.
- Kapitel XV:** **Partielle Differentialgleichungen**
Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung,
Laplacegleichung, Wellenleiter,
Biegeschwingungsgleichung.
- Kapitel XVI:** **Vektoranalysis und Integralsätze**
Divergenz, Gaußscher Satz,
Rotation, Stokescher Satz,
Differentialoperatoren.