

# Heidelberger Taschenbücher Band 105



Josef Stoer

# **Einführung in die Numerische Mathematik I**

unter Berücksichtigung von Vorlesungen von  
F. L. Bauer

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg GmbH 1976

Prof. Dr. Josef Stoer  
Institut für Angewandte Mathematik der Universität Würzburg

AMS Subject Classifications (1970)  
65-01, 65-02, 65 B05, 65 B15, 65 D05, 65 D30, 65 F05, 65 F20,  
65 F25, 65 F35, 65 G05, 65 H05, 65 H10

ISBN 978-3-540-07831-9      ISBN 978-3-662-06864-9 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-06864-9

Library of Congress Cataloging in Publication Data. Stoer, Josef. Einführung in die Numerische Mathematik. (Heidelberger Taschenbücher; Bd. 105) Includes bibliographies and index. 1. Numerical analysis. I. Bauer, Friedrich Ludwig, 1924-II. Title. QA297.S82 1976 511'.7 76-22599

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1972 und 1976  
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1976

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Keter Publishing House, Jerusalem und Brühlsche Universitätsdruckerei

# Vorwort zur zweiten Auflage

Bei Gelegenheit der zweiten Auflage wurde der Text an verschiedenen Stellen berichtigt und um einige neue Abschnitte erweitert. So wurden in das Kapitel 4, „lineare Gleichungssysteme“, neue Abschnitte über Pseudoinverse (4.8.5), Techniken zur Modifikation von Dreieckszerlegungen und unitären Zerlegungen von Matrizen (4.9), sowie als Anwendung davon, zwei Abschnitte (4.10, 4.11) über die Simplexmethode aufgenommen.

In Kapitel 5 wurde der Abschnitt 5.4 um einen Unterabschnitt (5.4.3) mit Hinweisen zur praktischen Realisierung des modifizierten Newton-Verfahrens und um eine Darstellung eines einschlägigen Rang-1-Verfahrens von Broyden erweitert. Schließlich werden in dem neuen Abschnitt 5.11 wichtige Methoden zur Lösung von Minimierungsproblemen ohne Nebenbedingungen beschrieben.

Schwerpunkt der Ergänzungen ist ohne Frage die Darstellung einiger für die Praxis besonders wichtiger Minimierungsverfahren, soweit sie sich zwanglos in eine Einführung in die numerische Mathematik einfügen. Leider haben diese Verfahren noch nicht in dem Umfang Eingang in die Lehrbücher für numerische Mathematik gefunden, wie es nicht nur nach Meinung des Verfassers wünschenswert und sachlich geboten wäre. Es war ein Ziel, diesen Mangel, auch der ersten Auflage dieser Einführung, zu beheben.

Herrn Professor Dr. R. Bulirsch und Herrn Professor Dr. F. Lempio möchte ich herzlich für die sorgfältige Durchsicht der Ergänzungen und vielen Verbesserungsvorschläge danken.

Schließlich gilt mein Dank Frau I. Brugger für das Schreiben des Manuskripts und dem Springer-Verlag für sein verständnisvolles Eingehen auf alle Ergänzungswünsche.

Würzburg, im März 1976

J. Stoer

# Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch gibt den Stoff des ersten Teils einer zweisemestrigen Einführungsvorlesung in die Numerische Mathematik wieder, die der Verfasser in den letzten Jahren an mehreren Hochschulen halten konnte. Neben der Beschreibung der theoretischen Grundlagen der Probleme und Methoden der numerischen Mathematik waren folgende Ziele für die Auswahl des Stoffes und seine Darstellung maßgeblich: Von den vielen Methoden der numerischen Mathematik sollten hauptsächlich diejenigen behandelt werden, die sich auch leicht auf Digitalrechnern realisieren lassen. Dementsprechend wird auf die algorithmische Beschreibung der Verfahren großer Wert gelegt — kritische Teile von Algorithmen werden häufig in Algol 60 beschrieben. Wenn mehrere Methoden zur Lösung eines Problems vorgestellt werden, wird gleichzeitig nach Möglichkeit versucht, diese Methoden bezüglich ihrer praktischen Brauchbarkeit zu vergleichen und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit anzugeben. Bei diesen Vergleichen sollten nicht nur die Anzahl der Operationen, Konvergenzeigenschaften usw. eine Rolle spielen, wichtiger ist es, die numerische Stabilität der Algorithmen zu vergleichen, um einen Einblick in die Gründe für die Zuverlässigkeit oder Unzuverlässigkeit von Verfahren zu geben. Das Einleitungskapitel über Fehleranalyse spielt dabei eine besondere Rolle: In ihm werden die Begriffe der numerischen Stabilität und Gutartigkeit von Algorithmen, die nach Meinung des Verfassers im Zentrum der numerischen Mathematik stehen, präzisiert und ihre Wichtigkeit genauer, als dies vielfach noch üblich ist, begründet und dargestellt. Nicht zuletzt dienen zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben dazu, die numerischen und theoretischen Eigenschaften von Verfahren zu illustrieren.

Da eine auch nur annähernd vollständige Aufzählung und Beschreibung brauchbarer Methoden weder möglich noch beabsichtigt war, sei der interessierte Leser auf folgende Zeitschriften hingewiesen, in denen er zahlreiche weitere Algorithmen teilweise sogar in der Form von Algol- oder Fortran-Programmen beschrieben findet:

Numerische Mathematik, Communications of the ACM, Journal of the ACM, The Computer Journal, Computing, Mathematics of Computation, BIT, SIAM Journal on Numerical Analysis, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Wegen ihrer Zuverlässigkeit werden insbesondere die Algol-Programme empfohlen, die in der Zeitschrift „Numerische Mathematik“ im Rahmen der sog. „Handbook Series“ erscheinen.

An Inhalt und Aufbau der diesem Buch zugrunde liegenden Vorlesung haben viele mitgewirkt. Insbesondere möchte ich dankbar den Einfluß von Professor Dr. F. L. Bauer und Professor Dr. R. Baumann anerkennen, auf deren Vorlesungsausarbeitungen ich mich stützen konnte. Darüber hinaus haben sie zusammen mit den Herren Professor Dr. R. Bulirsch und Dr. Chr. Reinsch mit wertvollen Verbesserungsvorschlägen zur Klärung einer Reihe von kritischen Punkten beigetragen.

Eine vorläufige Fassung des Buches entstand 1970 in Form eines Skriptums der Universität Würzburg unter der maßgeblichen Mitwirkung meiner Mitarbeiter Dipl.-Math. K. Butendeich, Dipl.-Phys. G. Schuller und Dipl.-Math. Dr. J. Zowe. Für ihre Einsatzbereitschaft, mit der sie bei der Redaktion der verschiedenen Fassungen des Manuskripts mithalfen, möchte ich Ihnen besonders herzlich danken. Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank Frau I. Brugger, die mit großer Gewissenhaftigkeit und Geduld die umfangreichen Schreivarbeiten ausführte.

Würzburg, im November 1971

J. Stoer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Fehleranalyse</b>	1
1.1 Zahldarstellung	1
1.2 Rundungsfehler und Gleitpunktrechnung	4
1.3 Fehlerfortpflanzung	8
1.4 Beispiele	19
Übungsaufgaben	27
Literatur	30
<b>2 Interpolation</b>	31
2.1 Interpolation durch Polynome	32
2.1.1 Theoretische Grundlagen.	
Die Interpolationsformel von Lagrange	32
2.1.2 Die Algorithmen von Neville und Aitken	33
2.1.3 Die Newtonsche Interpolationsformel.	
Dividierte Differenzen	37
2.1.4 Das Restglied bei der Polynominterpolation	41
2.2 Interpolation mit rationalen Funktionen	44
2.2.1 Allgemeine Eigenschaften der rationalen Interpolation	45
2.2.2 Inverse und reziproke Differenzen. Der Thielesche Kettenbruch	48
2.2.3 Neville-artige Algorithmen	52
2.2.4 Anwendungen und Vergleich der beschriebenen Algorithmen	56
2.3 Trigonometrische Interpolation	58
2.3.1 Theoretische Grundlagen	58
2.3.2 Die Algorithmen von Goertzel und Reinsch	62
2.3.3 Der Algorithmus von Cooley und Tukey	66
2.3.4 Anwendungen: Näherungsweise Berechnung von Fourierkoeffizienten mittels Abmin- derungsfaktoren	71

2.4	Spline-Interpolation . . . . .	76
2.4.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	77
2.4.2	Die Berechnung von Splinefunktionen . . . . .	80
2.4.3	Konvergenzeigenschaften der Spline- funktionen . . . . .	86
	Übungsaufgaben . . . . .	90
	Literatur . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Integration von Funktionen . . . . .</b>	<b>101</b>
3.1	Die Integrationsformeln von Newton-Cotes . . . . .	101
3.2	Die Euler-Maclaurinsche Summenformel . . . . .	104
3.3	Anwendung der Extrapolation auf die Integration . . . . .	109
3.4	Allgemeines über Extrapolationsverfahren . . . . .	115
3.5	Die Gaußsche Integrationsmethode . . . . .	119
3.6	Integrale mit Singularitäten . . . . .	128
	Übungsaufgaben . . . . .	130
	Literatur . . . . .	132
<b>4</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme . . . . .</b>	<b>133</b>
4.1	Gauß-Elimination, Dreieckszerlegung einer Matrix . . . . .	133
4.2	Der Gauß-Jordan-Algorithmus . . . . .	142
4.3	Das Cholesky-Verfahren . . . . .	146
4.4	Fehlerabschätzungen . . . . .	149
4.5	Rundungsfehleranalyse der Gaußschen Eliminationsmethode . . . . .	157
4.6	Rundungsfehlereinfluß bei der Auflösung von gestaffelten Gleichungssystemen . . . . .	162
4.7	Orthogonalisierungsverfahren, Die Verfahren von Householder und Schmidt . . . . .	164
4.8	Ausgleichsrechnung . . . . .	171
4.8.1	Das lineare Ausgleichsproblem, Die Normal- gleichungen . . . . .	172
4.8.2	Orthogonalisierungsverfahren zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems . . . . .	175
4.8.3	Die Kondition des linearen Ausgleichs- problems . . . . .	176
4.8.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme . . . . .	182
4.8.5	Die Pseudoinverse einer Matrix . . . . .	184
4.9	Modifikationstechniken . . . . .	186
4.10	Lineare Minimierungsprobleme, Die Simplexmethode . . . . .	195
4.11	Phase I der Simplexmethode . . . . .	206
	Übungsaufgaben . . . . .	210
	Literatur . . . . .	215



<b>5 Nullstellenbestimmung durch Iterationsverfahren</b>	217
<b>Minimierungsverfahren</b>	
5.1 Entwicklung von Iterationsverfahren	218
5.2 Allgemeine Konvergenzsätze	221
5.3 Die Konvergenz des allgemeinen Newton-Verfahrens	225
5.4 Ein modifiziertes Newton-Verfahren	229
5.4.1 Über die Konvergenz von Minimierungs-	
verfahren	230
5.4.2 Anwendung auf das modifizierte Newton-	
Verfahren	235
5.4.3 Hinweise zur praktischen Realisierung des modi-	
fizierten Newton-Verfahrens. Ein Rang-1-Ver-	
fahren von Broyden	239
5.5 Nullstellenbestimmung für Polynome. Das Newton-	
sche Verfahren	242
5.6 Sturmsche Ketten und Bisektionsverfahren	253
5.7 Das Verfahren von Bairstow	257
5.8 Genauigkeitsfragen bei der Nullstellenbestimmung	
von Polynomen	259
5.9 Interpolationsmethoden zur Bestimmung von	
Nullstellen	262
5.10 Die $\Delta^2$ -Methode von Aitken	267
5.11 Minimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen	272
Übungsaufgaben	280
Literatur	284
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b>	287