

Heidelberger Taschenbücher Band 151



Christian Blatter

Analysis I

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 54 Figuren

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1977

Prof. Dr. Christian Blatter
Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich

AMS Subject Classification (1970): 26-01; 26 A 03, 26 A 06,
26 A 09, 26 A 15, 26 A 24, 26 A 27, 26 A 51

ISBN 978-3-540-08204-0 ISBN 978-3-662-05709-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-05709-4

Library of Congress Cataloging in Publication Data. Blatter, Christian, 1935-. Analysis. (Heidelberger Taschenbücher; 151). Includes indexes. 1. Mathematical analysis. I. Title. QA300.B573 1977 515 77-3557

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1974, 1977.

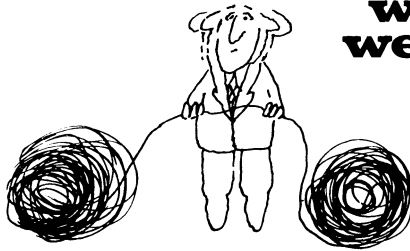
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1977.

Gesamtherstellung: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer. 2144/3140-543210

Meinen Eltern gewidmet

**Wir wollen
Ihnen weder erklären,
wo Endlos anfängt,
noch wo es aufhört.**

**Wohl aber,
wie es
weiter-
geht.**



(aus der Anzeige einer Formulardruckerei)

Vorwort zur 1. Auflage

Dieses Buch ist entstanden aus Vorlesungen, die ich zum Teil in Basel und in Stanford, dann wiederholt an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich gehalten habe. Mein Ziel war es, die Infinitesimalrechnung (den „Calculus“) und die Grundlagen der Analysis in der Weise nebeneinander zu entwickeln, daß die allgemeinen Sätze der Grundlagen laufend an konkreten Beispielen und Anwendungen erprobt werden können. Dabei habe ich mich bemüht, die zentralen Begriffe und Sätze jeweils in anschaulicher Sprache vorzubereiten und zu motivieren.

Entscheidend ist die Frage des richtigen Maßes an mathematischer Strenge, Allgemeinheit und Abstraktion. Abgesehen von den logischen und arithmetischen Grundlagen, wo ich mich auf einen „naiven“ Standpunkt gestellt habe, bin ich darauf ausgewiesen, eine strenge oder eben: eine richtige Analysis abzuliefern. Dieses Vorhaben ist zu Beginn einfach, wird aber zusehends schwieriger, da die betrachteten Situationen immer komplizierter und in der geometrischen Beschreibung aufwendiger werden. An Allgemeinheit habe ich soviel eingebaut, wie ein Student in den ersten Studienjahren (und manch einer im ganzen Leben) vernünftiger Weise braucht. Auf das Lebesguesche Integral und den schiefen Differentialkalkül wurde also verzichtet; dafür findet man z. B. eine ausführliche Technik des Integrierens und eine moderne Darstellung der Vektoranalysis, wie sie vom Physiker, aber auch vom Ingenieur benötigt wird.

Immerhin war ich bestrebt, von Anfang an mit den richtigen und über diese „Analysis“ hinaus fruchtbaren Begriffen zu arbeiten; dabei wurde ein höheres Niveau der Abstraktion gerne in Kauf genommen, wenn das Wesentliche dafür besser zur Geltung kam. So spielt sich Konvergenz von vorneherein in einem metrischen Raum ab und beschränkt sich nicht zunächst auf Folgen von reellen Zahlen. Weniger banales Beispiel: In der mehrdimensionalen Analysis wurde versucht, die heute übliche Denkweise der Differentialgeometrie vorzubereiten und zu schulen, soweit das ohne Gebrauch der multilinearen Algebra möglich ist. (Was dabei an elementarer linearer Algebra benötigt wird, habe ich laufend herbeizitiert, im allgemeinen aber nicht bewiesen.)

Die drei Bände „Analysis I–III“ sind in erster Linie bestimmt für Studenten der Mathematik und der Physik, allenfalls weiterer Wissenschaften, in den ersten zwei bis drei Semestern. Da stellt sich natürlich das Problem der verschiedenen Vorbildung: Immer mehr Studenten sind schon auf der Mittelschule (oder gar im Kindergarten) mit „Neuer Mathematik“ konfrontiert worden; andere haben dort einen eher traditionellen Mathematikunterricht genossen. Um dieses Buch einem möglichst großen Kreis zugänglich zu machen, habe ich mich entschlossen, einfach am Anfang anzufangen; der Leser mag dann selbst entscheiden, wo er einsteigen will. Dem Novizen würde ich empfehlen, die Abschnitte 15 und 16 sowie die Kapitel 3 und 4 fürs erste zu überspringen oder wenigstens nur kursorisch zu lesen.

Zu Dank verpflichtet bin ich meinen Lehrern Heinz Huber (der manche gute Idee zu diesen Vorlesungen beigesteuert hat) und Hans Samelson (an den ich bei der Niederschrift oft gedacht habe: whether he would like it that way), ferner auch Walter Rudin (dessen unerreichte „Principles of Mathematical Analysis“ mir an verschiedenen Stellen zu Hilfe gekommen sind). Herrn Hugo Rytz danke ich für die sorgfältige Reinzeichnung der zahlreichen Figuren, endlich der Werbeagentur René Blaser, Zürich, für die Überlassung des voranstehenden Cartoons.

Zürich, Ende März 1974

Christian Blatter

Vorwort zur 2. Auflage

Die zweite Auflage ist im wesentlichen ein verbesserter Nachdruck der ersten. Umfangreichere Änderungen habe ich nur in den Abschnitten 16, 41–43 und 94–96 vorgenommen. Die Abschnitte 94 und 95 wurden vollständig neu geschrieben mit dem Ziel, die geometrischen Eigenschaften der Abbildung $t \rightarrow e^{it}$ noch klarer herauszuarbeiten. – Kleinere Verschiebungen von Seitenzahlen (in den Abschnitten 94–96 auch von Satznummern) waren unvermeidbar; dies ist bei Verweisen aus den Bänden II und III, 1. Auflage, zu berücksichtigen.

Ich danke allen Kollegen und Kommilitonen, die mich auf mögliche Verbesserungen dieser „Analysis“ aufmerksam gemacht haben.

Zürich, Ende Januar 1977

Christian Blatter

Hinweise für den Leser

Das ganze Werk (drei Bände) ist eingeteilt in dreißig Kapitel, jedes Kapitel in höchstens neun Abschnitte. Sätze und Propositionen sind kapitelweise numeriert; die halbfette Signatur **(12.3)** bezeichnet den dritten Satz in Kapitel 12. Formeln, die später noch einmal benötigt werden, sind abschnittsweise mit mageren Ziffern numeriert. Innerhalb eines Abschnitts wird ohne Angabe der Abschnittnummer auf die Formel (1) zurückverwiesen; (123.4) hingegen bezeichnet die Formel (4) des Abschnitts 123. Eingekreiste Ziffern schließlich nummerieren abschnittsweise die erläuternden Beispiele und Anwendungen. – Definitionen sind erkenntlich am Kursivdruck des Definiendums, Sätze an der vorangestellten Signatur und am durchlaufenden Kursivdruck des Textes. Die beiden Winkel \lrcorner und \llcorner markieren den Beginn und das Ende eines Beweises, der Kreis \circ das Ende eines Beispiels.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Grundbegriffe	1
11. Logische Zeichen	1
12. Mengen	2
13. Funktionen	7
14. Tupel und Folgen	13
15. Äquivalenzrelationen	15
16. Ordnungsrelationen	16
Kapitel 2. Die Axiome von \mathbb{R}	20
21. Körper	20
22. Geordnete Körper	22
23. Vollständigkeit	24
24. Intervalle	27
Kapitel 3. Natürliche, ganze und rationale Zahlen	29
31. Die Peano-Axiome	29
32. Beispiele zur vollständigen Induktion	31
33. Rekursion	33
34. Der binomische Lehrsatz	36
35. Ganze und rationale Zahlen	39
Kapitel 4. Vervollständigung von \mathbb{Q}	42
41. Schnitte	42
42. Addition der Schnitte	44
43. Multiplikation der Schnitte	46
44. Einbettung von \mathbb{Q}	49
45. Abzählbare Mengen	51
46. Überabzählbare Mengen	55
Kapitel 5. Komplexe Zahlen und Vektoren	57
51. Konstruktion des Körpers \mathbb{C}	57
52. Elementare Eigenschaften von \mathbb{C}	60
53. Der n -dimensionale euklidische Raum	63

Kapitel 6. Folgen	66
61. Begriff des metrischen Raumes	66
62. Konvergenz	67
63. Teilfolgen	70
64. Rechenregeln	72
65. Monotone Folgen	78
66. Vollständigkeit	82
67. Uneigentliche Konvergenz	84
Kapitel 7. Reihen	86
71. Konvergenz	86
72. Vergleichskriterien	89
73. Reihen mit positiven Gliedern	91
74. Bedingt konvergente Reihen	94
75. Produkt zweier Reihen	99
Kapitel 8. Stetige Funktionen	102
81. Stetigkeit	102
82. Rechnen mit stetigen Funktionen	105
83. Grenzwerte von Funktionen	108
84. Rechnen mit Grenzwerten	113
85. Einseitige Grenzwerte. Uneigentliche Grenzwerte	117
86. Satz vom Maximum	118
87. Gleichmäßige Stetigkeit	124
88. Zwischenwertsatz	125
89. Monotone Funktionen	127
Kapitel 9. Die Exponentialfunktion	131
91. Elementare Eigenschaften	131
92. Die Logarithmusfunktion	135
93. Hyperbolische Funktionen	137
94. Die Funktion cis	141
95. Die Funktion arg	147
96. Trigonometrische Funktionen	151
Kapitel 10. Differentialrechnung I	155
101. Begriff der Ableitung	155
102. Rechenregeln	157
103. Gegenbeispiele	162
104. Extrema	164
105. Mittelwertsatz	168
106. Monotonie	173

Kapitel 11. Differentialrechnung II	178
111. Höhere Ableitungen	178
112. Konvexität	180
113. Einige allgemeine Ungleichungen	184
114. Taylorsche Formel (mit Restglied)	188
115. Taylorsche Formel (qualitative Fassung)	191
116. Taylor-Reihe	196
Liste der Symbole und Abkürzungen	199
Sachverzeichnis	201

Inhaltsverzeichnis Analysis II

Kapitel 12. Das Riemannsche Integral

- 121. Begriff des Riemannschen Integrals
- 122. Existenz
- 123. Elementare Eigenschaften
- 124. Integral über ein endliches Intervall
- 125. Allgemeine Riemannsche Summen
- 126. Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Kapitel 13. Integralrechnung

- 131. Stammfunktionen
- 132. Partielle Integration
- 133. Substitution
- 134. Bestimmte Integrale
- 135. Uneigentliche Integrale
- 136. Vergleich von uneigentlichen Integralen mit Reihen

Kapitel 14. Integration der rationalen Funktionen

- 141. Reelle und komplexe Polynome
- 142. Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion
- 143. Integration der Partialbrüche
- 144. Weitere Ausdrücke, die sich elementar integrieren lassen

Kapitel 15. Kurven

- 151. Begriff der Kurve
- 152. Totale Variation
- 153. Länge einer Kurve
- 154. Beispiele
- 155. Bogenlänge als Parameter
- 156. Tangentialvektor

Kapitel 16. Ebene Kurven

- 161. Argumentzuwachs längs einer ebenen Kurve
- 162. Ableitung des Arguments
- 163. Krümmung von ebenen Kurven
- 164. Krümmungskreis
- 165. Evolute
- 166. Evolvente

Kapitel 17. Funktionenfolgen

- 171. Problemstellung
- 172. Gleichmäßige Konvergenz
- 173. Stetigkeit der Grenzfunktion
- 174. Ableitung der Grenzfunktion
- 175. Integral der Grenzfunktion
- 176. Integrale mit einem Parameter

Kapitel 18. Potenzreihen

- 181. Limes inferior und Limes superior
- 182. Potenzreihen
- 183. Die Binomialreihe
- 184. Der Satz von Abel

Kapitel 19. Die Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

- 191. Funktionen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
- 192. Lineare Abbildungen
- 193. Begriff der Ableitung
- 194. Partielle Ableitungen
- 195. Existenz der Ableitung
- 196. Die Spezialfälle $m=1$ und $n=1$

Kapitel 20. Mehrdimensionale Differentialrechnung

- 201. Differentiationsregeln
- 202. Anwendungen der Kettenregel
- 203. Mittelwertsätze
- 204. Höhere partielle Ableitungen
- 205. Taylorsche Formel
- 206. Stationäre Punkte und lokale Extrema

Liste der Symbole und Abkürzungen**Sachverzeichnis Analysis I und II**

Inhaltsverzeichnis Analysis III

Kapitel 21. Hauptsätze der mehrdimensionalen Differentialrechnung

- 211. Stetige Differenzierbarkeit
- 212. Hilfssätze
- 213. Der Satz über die Umkehrabbildung
- 214. Die Funktionaldeterminante
- 215. Der Satz über implizite Funktionen
- 216. Der Immersionsatz

Kapitel 22. „Flächen“ im \mathbb{R}^n

- 221. Begriff der m -Fläche
- 222. Tangentialebene
- 223. Hyperflächen
- 224. Bedingt stationäre Punkte
- 225. Lagrangesche Multiplikatoren
- 226. Beispiele
- 227. Globale Extrema

Kapitel 23. Das Jordansche Maß im \mathbb{R}^m

- 231. Vorbemerkungen
- 232. Äußeres und inneres Jordansches Maß
- 233. Grundeigenschaften des Maßes
- 234. Das Maß von Quadern. Translationsinvarianz
- 235. Verhalten des Maßes gegenüber C^1 -Abbildungen
- 236. Hilfssätze
- 237. Verhalten des Maßes gegenüber linearen Abbildungen

Kapitel 24. Mehrfache Integrale

- 241. Das Riemannsches Integral im \mathbb{R}^m
- 242. Reduktionssatz („Satz von Fubini“)
- 243. Integral über beliebige meßbare Mengen
- 244. Praktische Berechnung mehrfacher Integrale
- 245. Anwendung: Volumen der m -dimensionalen Kugel
- 246. Uneigentliche mehrfache Integrale

Kapitel 25. Variablentransformation bei mehrfachen Integralen

- 251. Zylinder- und Kugelkoordinaten
- 252. Problemstellung
- 253. Hilfssätze
- 254. Die Transformationsformel

Kapitel 26. Flächen im \mathbb{R}^3

- 261. Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3
- 262. Orientierung
- 263. Begriff des Flächeninhalts
- 264. Eigenschaften des Flächeninhalts

Kapitel 27. Vektorfelder

- 271. Vorbemerkungen. Begriff des Vektorfeldes
- 272. Linienintegrale
- 273. Konservative Felder
- 274. Infinitesimale Zirkulation
- 275. Rotation (zweidimensionaler Fall)
- 276. Rotation (dreidimensionaler Fall)

Kapitel 28. Die Greensche Formel für ebene Bereiche

- 281. Der Heine-Borelsche Überdeckungssatz
- 282. Zerlegung der Einheit
- 283. Die Greensche Formel für glatt berandete Bereiche
- 284. Zulässige Bereiche
- 285. Anwendungen der Greenschen Formel

Kapitel 29. Der Satz von Stokes

- 291. Begriff des Flusses
- 292. Zulässige Flächen
- 293. Ein Übertragungsprinzip
- 294. Der Satz von Stokes
- 295. Einfach zusammenhängende Gebiete
- 296. Die Integrabilitätsbedingung

Kapitel 30. Der Satz von Gauß

- 301. Divergenz eines Vektorfeldes
- 302. Der Satz von Gauß für glatt berandete Bereiche
- 303. Zulässige Bereiche
- 304. Der Laplace-Operator
- 305. Ein Satz der Potentialtheorie

Liste der Symbole und Abkürzungen**Sachverzeichnis Analysis I bis III**