Springer-Lehrbuch

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Grundwissen Mathematik

Ebbinghaus et al.: Zahlen
Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie
Hämmerlin/Hoffmann: Numerische Mathematik
Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie
Leutbecher: Zahlentheorie
Remmert: Funktionentheorie 1
Remmert: Funktionentheorie 2
Walter: Analysis 1
Walter: Analysis 2

Herausgeber der Grundwissen-Bände im Springer-Lehrbuch-Programm sind: G. Hämmerlin, F. Hirzebruch, H. Kraft, K. Lamotke, R. Remmert, W. Walter

Wolfgang Walter

Analysis 1

Vierte, korrigierte Auflage

Mit 145 Abbildungen

Springer

Wolfgang Walter
Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
D-76128 Karlsruhe

Mathematics Subject Classification (1991): 26-01, 26-03, 26Axx, 34A30

Dieser Band erschien bisher als Band 3 der Reihe *Grundwissen Mathematik*

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme
Walter, Wolfgang: Analysis / Wolfgang Walter. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hongkong; London; Mailand; Paris; Santa Clara; Singapur; Tokio: Springer.
1.-4., korrigierte Aufl. - 1997.
(Springer-Lehrbuch) (Grundwissen Mathematik)

ISBN 978-3-540-62062-4 ISBN 978-3-662-05696-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-05696-7

Satz: Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg
Einbandgestaltung: *design & production GmbH*, Heidelberg
SPIN: 10560612 44/3143 - 5 4 3 2 1 0 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort zur 4. Auflage

Größere Änderungen wurden in der Neuauflage nicht vorgenommen. Hinweise aus dem Leserkreis, für die sich der Autor bedankt, haben die Zahl der noch unentdeckten Druckfehler weiter verringert und auch sonst zu Verbesserungen geführt.

Das letzte Thema von §12 „Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes" wurde durch mehrere Übungsaufgaben vertieft; insbesondere wurde der Satz von Zygmund aufgenommen. Der hier gebotene Zugang zu wesentlichen Sätzen der Analysis besticht durch Kürze und Einfachheit und ist auch heute noch nicht allgemein bekannt, wie die entsprechende Literatur zeigt. Er geht wohl auf Zygmund zurück und findet sich in dem Buch *Theory of the Integral* von S. Saks (2nd ed., Warszawa 1937, p. 203). Seine Grundidee läßt sich bis auf L. Scheeffer (Acta math. 5 (1884/1885)) zurückverfolgen.

Karlsruhe, im November 1996 Wolfgang Walter

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch ist der erste Band eines zweibändigen Werkes über Analysis und behandelt die Funktionen einer reellen Veränderlichen. In der komplexen Analysis beschränkt es sich im wesentlichen auf Potenzreihen. Es enthält insbesondere den Stoff, welcher üblicherweise im ersten Semester einer einführenden Analysis-Vorlesung für Mathematiker, Physiker und Informatiker geboten wird, und geht an einigen Stellen darüber hinaus. Das Buch wendet sich an Studenten, denen es sich als ein hilfreicher Begleiter der Vorlesung und eine Quelle zur Vertiefung des Gegenstandes anbietet, an die im Beruf stehenden Mathematiker, besonders an die Lehrer an weiterführenden Schulen, und schließlich an alle, die etwas über die Analysis und ihre Bedeutung im größeren naturwissenschaftlichen und kulturellen Zusammenhang erfahren möchten.

Damit sind wir bei einem wesentlichen Anliegen der Lehrbuchreihe „Grundwissen Mathematik“, dem historischen Bezug. Die mathematischen Begriffe und Inhalte der Analysis sind nicht vom Himmel der reinen Erkenntnis gefallen, und kein Denker im Elfenbeinturm hat sie ersonnen. Die europäische Geistesgeschichte beginnt dort, wo Natur nicht mehr als rätselhaftes, von unheimlichen höheren Mächten gesteuertes Geschehen, sondern als rational erklärbar verstanden wird: bei den jonischen Philosophen des 6. vorchristlichen Jahrhunderts. Die Analysis ist entstanden in der Verfolgung dieses Zieles, die Welt rational zu durchdringen und ihre Gesetzmäßigkeiten zu finden. Ihre Geschichte ist ein Stück Kulturgeschichte.

Jedem einzelnen Paragraphen ist ein Prolog vorangestellt, in welchem die historische Entwicklung und gelegentlich auch die Lebensumstände der Hauptdarsteller dargelegt werden. Die Grundbegriffe reelle Zahl, Funktion, Grenzwert und Stetigkeit, Ableitung und Integral treten uns im heutigen Unterricht in der Form eines Axiomensystems oder einer abstrakten Definition entgegen, welche wenig über Sinn, Zweck und Bedeutung verrät. All diese Begriffe sind im Ansatz bereits in der Antike vorhanden, und sei es auch nur in der Form der Nichtbewältigung (wie bei der reellen Zahl). Sie waren das unentbehrliche Handwerkszeug für die Entdeckung der Naturgesetze und wurden dabei unter bewußter Aufgabe der „griechischen Strenge“ geschaffen, um schließlich im 19. Jahrhundert wieder auf ein sicheres Fundament gestellt zu werden. Die Schilderung dieses historischen Prozesses stößt auf eine wohlbekannte Schwierigkeit: Die methodisch bedingte Anordnung einer heutigen Vorlesung ist völlig verschieden von der historischen Evolution des Gegenstandes. Wenn diese nicht in einen Anhang verbannt, sondern parallel zum Text dargestellt wird, so war dafür vor allem der Gesichtspunkt maßgebend, daß nur in der Nähe zum Gegenstand eine lebendige, durch konkrete Aufgaben und Beispiele illustrierte Beschreibung gedeiht. Verweise und gelegentliche Überschneidungen waren dabei nicht ganz zu vermeiden.

Die sachlichen und methodischen Prinzipien, denen der Autor hier Gestalt geben wollte, seien kurz erläutert. Das Fundament, auf dem wir das Gebäude der Analysis errichten, ist ein Axiomensystem für die reellen Zahlen. Das Vollständigkeitsaxiom erscheint in der Form der Existenz des Supremums einer beschränkten Menge. Im Teil A (Grundlagen) werden die Überlegungen, welche zur Existenz von Wurzeln führen, sogleich für Lipschitz-Funktionen durchgeführt. So ergibt sich ohne Mehrarbeit (und ohne ε und δ) ein erster Satz über die Umkehrfunktion. Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, hier kurz AGM-Ungleichung genannt, wird an mehreren Stellen mit Vorteil benutzt. Die Themen Stetigkeit und Grenzwert werden im Teil B vor der Differential- und Integralrechnung behandelt, und in diesem Teil werden auch die elementaren Funktionen eingeführt. Hier folgen wir also einer „kontinentalen“, auf Euler (Introductio) und Cauchy (Cours d'Analyse) zurückgehenden Tradition, während englischsprachige Lehrbücher des ‚Calculus‘ die Differentialrechnung nach vorne ziehen. Eine bewußte Betonung der Ordnungsstruktur (sie ist schon beim Vollständigkeitsaxiom angedeutet) kommt u.a. bei den zentralen Existenzsätzen, dem Zwischenwertsatz und dem Satz von Bolzano-Weierstraß und ihren Beweisen zum Ausdruck: Eine beschränkte Folge hat einen größten (und einen kleinsten) Häufungspunkt, und eine stetige, das Vorzeichen wechselnde Funktion hat eine erste Nullstelle. Das Halbierungsverfahren als Beweisprinzip erscheint erst im 2. Band.

Im Teil C schließlich wird die Differential- und Integralrechnung dargestellt. Wir beginnen mit dem Integral. Man kann jedoch bei der Erarbeitung des Stoffes ohne weiteres die Reihenfolge umkehren, also die Abschnitte 10.1 bis 10.11 über die Ableitung vorziehen und nach dem Integral (§ 9) beim Hauptsatz weitermachen. Die hier gewählte Anordnung hat der Autor seit vielen Jahren im Hörsaal erprobt. Sie übt auf den Dozenten einen gelinden Druck aus, den zentralen Begriff des Integrals eingehend und mit Beispielen zu behandeln; der Hauptsatz ist ja noch nicht in Sicht! Daß wir beim altbewährten Riemann-Integral geblieben sind, hat vor allem zwei Gründe. Das Integral mißt eine Größe, welche elementarer Messung nicht zugänglich ist. Die Einschließung von beiden Seiten, welche dem Riemann-Integral zugrundeliegt, bringt diesen Aspekt in unübertroffener Klarheit und Anschaulichkeit zum Ausdruck. Das gilt im besonderen für die durch Integrale gemessenen geometrischen und physikalischen Größen. Zum zweiten wurde in den letzten Jahren ein einfacher, direkter Zugang zum Lebesgue- und Perron-Integral gefunden, der auf Riemannschen Summen basiert und im zweiten Band dargestellt werden soll. Am Schluß dieses Teiles wird der allgemeine Mittelwertsatz mit einer einfachen, noch wenig bekannten Methode bewiesen. Ob sie dereinst den Satz von Rolle verdrängen wird, wird sich erweisen (hier hat sie es nicht getan).

Ein Verweis auf Satz 6.7 (Corollar 6.7) bezieht sich auf den Satz (das Corollar) im Abschnitt 6.7, welcher sich in § 6 befindet. Die Aufgabe 7 im Aufgabenteil von § 6 wird als Aufgabe 6.7, innerhalb von § 6 als Aufgabe 7 zitiert.

Ein Verweis auf Abschnitt II.8.1 bezieht sich auf den Abschnitt 8.1 im zweiten Band.

Das Herausgebergremium hat das Entstehen des Werkes kritisch begleitet, und insbesondere Herr Lamotke hat durch nützliche Vorschläge zu seiner Verbesserung beigetragen. Herr Dr. A. Voigt hat fast alle Bilder mit sicherem Blick für das Wesentliche gezeichnet; das Programmieren des Tuschezeichners besorgte Herr cand. inf. B. Stauß. Die schwierige Aufgabe, aus einer vielfach schwer entzifferbaren Vorlage ein sauberes Manuskript herzustellen, besorgte Frau I. Jendrasik mit großer Sachkenntnis und Zuverlässigkeit. Die Herren Dr. R. Redlinger und Dr. A. Voigt haben Korrekturen gelesen und dabei manche wertvolle Anregung gegeben. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Springer-Verlag. Er hat dem Autor alle Unterstützung gewährt und ist auf seine Wünsche zuvorkommend eingegangen.

Für Anregungen aus dem Leserkreis werde ich immer dankbar sein.

Karlsruhe, im Juli 1985 Wolfgang Walter

Inhaltsverzeichnis

A. Grundlagen

§ 1. Reelle Zahlen 1

1.1 Mengen 4 * 1.2 Funktionen 5 * 1.3 Körperaxiome 6 * 1.4 Anordnungsaxiome 7 * 1.5 Obere und untere Schranken, größtes und kleinstes Element, Supremum und Infimum 9 * 1.6 Das Vollständigkeitsaxiom. 1.7 Vorzeichen und Absolutbetrag 10 * 1.8 Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ 11 * 1.9 Intervalle und Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen 12 * 1.10 Bemerkungen zur Axiomatik 13 * 1.11 Bemerkungen zur Logik und Beweistechnik 14 * Aufgaben 15

§ 2. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion 17

2.1 Definition der natürlichen Zahlen. 2.2. Beweis durch vollständige Induktion 18 * 2.3 Einige Eigenschaften von $\mathbb{N}$ 19 * 2.4 Die archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen 20 * 2.5 Ganze und rationale Zahlen. 2.6 Endliche Mengen 21 * 2.7 Folge, Kartesisches Produkt und n-Tupel. 2.8 Rekursive Definition 22 * 2.9 Abzählbare Mengen 23 * 2.10 Nichtabzählbare Mengen 24 * 2.11 Definition des Summen- und des Produktzeichens 25 * 2.12 Einige einfache Tatsachen 27 * 2.13 Bernoullische Ungleichung. 2.14 Die Binomialformel 28 * 2.15 Zahlendarstellung in Positionssystemen 31 * 2.16 Kombinatorische Aufgaben 32 * 2.17 Die Fibonacci-Zahlen 33 * Aufgaben 34

§ 3. Polynome und Wurzeln 37

3.1 Das Rechnen mit Funktionen. Funktionenraum und Funktionenalgebra. 3.2 Polynome 39 * 3.3 Das Interpolationspolynom 42 * 3.4 Monotone Funktionen 43 * 3.5 Die Lipschitz-Bedingung 44 * 3.6 Die n-te Wurzel. Definition und Satz 46 * 3.7 Arithmetisches und geometrisches Mittel 47 * 3.8 Potenzen mit rationalen Exponenten 48 * Aufgaben 50

B. Grenzwert und Stetigkeit

§ 4. Zahlenfolgen 52

4.1 Reelle Zahlenfolgen. 4.2 Nullfolgen 58 * 4.3 Konvergente Folgen 60 * 4.4 Rechenregeln 62 * 4.5 Teilfolge, Umordnung einer Folge. 4.6 Divergente Folgen 64 * 4.7 Konvergenzkriterien für monotone Folgen 65 * 4.8 Die Exponentialfunktion. Definition und Satz 66 * 4.9 Der Logarithmus 67 * 4.10 Iterationsverfahren. Berechnung von Wurzeln 69 * 4.11 Das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauß 70 * 4.12 Häufungswerte von Folgen 71 * 4.13 Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen. 4.14 Konvergenzkriterium von Cauchy 72 * 4.15 Oberer und unterer Limes beschränkter Folgen 73 * 4.16 Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ 74 * Aufgaben 76

§ 5. Unendliche Reihen 78

5.1 Definitionen und einfache Eigenschaften 86 * 5.2 Satz 88 * 5.3 Satz. 5.4 Einige Reihensummen 89 * 5.5 Reihen mit positiven Gliedern 92 * 5.6 Alternierende Reihen 93 * 5.7 Das Konvergenzkriterium von Cauchy. 5.8 Absolute Konvergenz 94 * 5.9 Kriterium für absolute Konvergenz 95 * 5.10 Verdichtungssatz von Cauchy 97 * 5.11 Umordnung von unendlichen Reihen 98 * 5.12 Reihen mit beliebigen Indexmengen 99 * 5.13 Großer Umordnungssatz 100 * 5.14 Doppelreihen 101 * 5.15 Multiplikation von Reihen 102 * 5.16 Bedingte und unbedingte Konvergenz 104 * 5.17 Riemannscher Umordnungssatz. 5.18 Dezimalbrüche und g-adische Entwicklung 105 * Aufgaben 107

§ 6. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit 109

6.1 Grenzwert und Stetigkeit 114 * 6.2 Einseitiger Limes, einseitige Stetigkeit 116 * 6.3 Folgenkriterium 117 * 6.4 Das Konvergenzkriterium von Cauchy 118 * 6.5 Rechenregeln. 6.6 Satz 119 * 6.7 Zusammengesetzte Funktionen (Komposition). 6.8 Stetigkeit auf einem kompakten Intervall. Maximum und Minimum einer Funktion 120 * 6.9 Gleichmäßige Stetigkeit 121 * 6.10 Zwischenwertsatz 123 * 6.11 Satz über die Umkehrfunktion 124 * 6.12 Limes für $x \to \pm\infty$ 125 * 6.13 Uneigentliche Grenzwerte 126 * 6.14 Konvergenzkriterium für monotone Funktionen. 6.15 Sprungstelle und Schwankung 127 * 6.16 Stetigkeitsmodul. 6.17 Stetige Fortsetzung 128 * Aufgaben 129

§ 7. Potenzreihen. Elementar-transzendente Funktionen 131

7.1 Gleichmäßige Konvergenz 139 * 7.2 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. 7.3 Satz 140 * 7.4 Gleichmäßige Konvergenz von Reihen 141 * 7.5 Das Weierstraßsche Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz. 7.6 Potenzreihen 142 * 7.7 Satz. 7.8 Multiplikation von Potenzreihen 144 * 7.9 Die Exponentialreihe 145 * 7.10 Identitätssatz für Potenzreihen. 7.11 Die logarithmische Reihe 147 * 7.12 Der Grenzwertsatz von Abel 149 * 7.13 Einsetzen von Potenzreihen 150 * 7.14 Division von Potenzreihen. 7.15 Berechnung von Potenzreihen, Koeffizientenvergleich 151 * 7.16 Sinus und Cosinus 152 * 7.17 Die Arcusfunktionen (zyklometrische Funktionen) 156 * 7.18 Die Hyperbelfunktionen 158 * 7.19 Die Areafunktionen 159 * 7.20 Potenzreihen für Tangens und Cotangens 160 * 7.21 Nochmals Potenzsummen 162 * Aufgaben 163

§ 8. Komplexe Zahlen und Funktionen 166

8.1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen 166 * 8.2 Polarkoordinaten 168 * 8.3 Wurzeln und Einheitswurzeln 169 * 8.4 Polynome 170 * 8.5 Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen 171
Komplexe Analysis. 8.6 Umgebungen 174 * 8.7 Konvergenz von Folgen und Reihen 174 * 8.8 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen. 8.9 Potenzreihen 176 * 8.10 Entwicklung um einen neuen Mittelpunkt 177 * 8.11 Die Exponentialfunktion im Komplexen 178 * 8.12 Die Partialbruchzerlegung des Cotangens 181 * 8.13 Die Riemannsche Zetafunktion 183 * Aufgaben 184

C. Differential- und Integralrechnung

§9. Das Riemannsche Integral 187

9.1 Zerlegung, Ober- und Untersumme 197 * 9.2 Hilfssatz 198 * 9.3 Oberes und unteres Integral. Das Riemann-Integral. 9.4 Satz 199 * 9.5 Integrabilitätskriterium von Riemann. 9.6 Satz über Integrierbarkeit 201 * 9.7 Die Riemannsche Definition des Integrals 202 * 9.8 Komplexwertige Funktionen. 9.9 Satz über die Linearität des Integrals 205 * 9.10 Einige Eigenschaften des Integrals 206 * 9.11 Satz. 9.12 Dreiecksungleichung für Integrale 207 * 9.13 Mittelwertsatz der Integralrechnung 208 * 9.14 Satz über gliedweise Integration 209 * 9.15 Integrale über Teilintervalle 211 * 9.16 Das Integral als Funktion der oberen Grenze 212 * 9.17 Die Bestimmung von Summen durch Integrale 213 * 9.18 Die Berechnung von π 215 * Aufgaben 218

§10. Differentiation 221

10.1 Differenzenquotient und Ableitung 240 * 10.2 Einseitige Differenzierbarkeit 242 * 10.3 Einfache Tatsachen 243 * 10.4 Das Differential 245 * 10.5 Rechenregeln für die Ableitung 246 * 10.6 Die Kettenregel 247 * 10.7 Ableitung der Umkehrfunktion 248 * 10.8 Zusammenfassung 249 * 10.9 Höhere Ableitungen, die Klassen C^k 251 * 10.10 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 254 * 10.11 Regel von de l'Hospital 256 * 10.12 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 259 * 10.13 Satz über gliedweise Differentiation 261 * 10.14 Taylor-Reihe und Taylor-Polynom 262 * 10.15 Satz von Taylor 263 * 10.16 Die Taylorsche Entwicklung von Funktionen 265 * 10.17 Satz von S. Bernstein (1914). 10.18 Das Gegenbeispiel von Cauchy 267 * Aufgaben 268

§11. Anwendungen 273

11.1 Die Stammfunktion oder das unbestimmte Integral 273 * 11.2 Die Technik des Integrierens 274 * 11.3 Partielle Integration 275 * 11.4 Die Substitutionsregel 277 * 11.5 Die Integration der rationalen Funktionen 278 * 11.6 Satz 280 * 11.7 Vorläufiges zum Inhaltsproblem 282 * 11.8 Die Fläche ebener Bereiche als Integral 283 * 11.9 Darstellung in Polarkoordinaten 284 * 11.10 Das Volumen von Rotationskörpern 286 * 11.11 Schwerpunkte 290 * 11.12 Trägheitsmomente 293 * 11.13 Mechanische Arbeit 295 * 11.14 Numerische Integration 296 * 11.15 Hinreichende Kriterien für Maxima und Minima. 11.16 Kriterien für Wendepunkte 300 * 11.17 Konvexe und konkave Funktionen. 11.18 Die Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen 301 * 11.19 Mehr über konvexe Funktionen 303 * 11.20 Kurvendiskussion 304 * 11.21 Mittelwerte mit einer beliebigen Funktion 307 * 11.22 Satz über die Mittel r-ter Ordnung 308 * 11.23 Höldersche Ungleichung 309 * 11.24 Minkowskische Ungleichung 310 * 11.25 Eine Ungleichung von Redheffer 311 * 11.26 Kontrahierende Abbildungen. Das Kontraktionsprinzip 312 * 11.27 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung 317 * Aufgaben 320

§12. Ergänzungen 323

Uneigentliche Integrale. 12.1 Unbeschränkter Integrationsbereich 323 * 12.2 Rechenregeln 324 * 12.3 Das Konvergenzkriterium von Cauchy. 12.4 Absolute Konvergenz, Majorantenkriterium 325 * 12.5 Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale 326 * 12.6 Grenzübergang unter dem Integralzeichen 327 * 12.7 Unbeschränkter Integrand 328 * 12.8 Die Gammafunktion 330

Einfache Differentialgleichungen 333 * 12.9 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung 334 * 12.10 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung 336 * 12.11 Der harmonische Oszillator 339 * 12.12 Reibungskräfte 341 * 12.13 Gedämpfte Schwingung 342 * 12.14 Resonanz 344
Die Eulersche Summenformel. 12.15 Bernoullische Polynome 346 * 12.16 Eulersche Summenformel 347 * 12.17 Die Eulersche Konstante 349 * 12.18 Produktdarstellung des Sinus 350 * 12.19 Wallissches Produkt. 12.20 Die Stirlingsche Formel 351
Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Dini-Derivierte 353 * 12.21 Satz 355 * 12.22 Limes superior und Limes inferior 356 * 12.23 Die vier Dini-Derivierten 357 * 12.24 Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung 358 * 12.25 Satz. 12.26 Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion 359 * Aufgaben 361

Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben 365

Literatur 373

Bezeichnungen und Grundformeln 376

Namen- und Sachverzeichnis 377