

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE · F. K. SCHMIDT · B. L. VAN DER WAERDEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT

BAND IV

DIE MATHEMATISCHEN
HILFSMITTEL DES PHYSIKERS

VON

E. MADELUNG



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1936

DIE MATHEMATISCHEN HILFSMITTEL DES PHYSIKERS

VON

DR. ERWIN MADELUNG

ORD. PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT FRANKFURT A. M.

UNTER MITARBEIT VON

DR. KARL BOEHLE UND DR. SIEGFRIED FLÜGGE
GÖTTINGEN LEIPZIG

DRITTE
VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 25 TEXTFIGUREN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1936

ISBN 978-3-662-01882-8 ISBN 978-3-662-02177-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-02177-4

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.
Copyright 1936 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1936.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die Veranlassung zur Niederschrift dieses Buches entsprang einem persönlichen Bedürfnis. Ursprünglich war das Material für den eigenen Gebrauch bei Untersuchungen und Vorlesungen gesammelt, um das dauernde Nachschlagen in den verschiedensten Lehrbüchern zu ersparen. Als ich mich dann auf das Zureden befreundeter Fachkollegen hin entschloß, das Vorhandene nach Möglichkeit zu ergänzen und in die Form eines Buches zu bringen, glaubte ich, daß das von mir Gesammelte auch für andere nützlich sein könnte. Es schwebte mir dabei das Ideal vor, ein Buch zu verfassen, das als theoretisches Analogon zu dem bekannten Buche von KOHLRAUSCH aufgefaßt werden könnte. Je weiter ich mit der Bearbeitung des Materials fortschritt, um so deutlicher wurde mir freilich, daß sich dieses Ideal zunächst nicht würde erreichen lassen, und daß es in mancher Richtung besser gewesen wäre, wenn dieses Buch nicht von einem, sondern von mehreren Physikern und Mathematikern geschrieben würde. So verlockend es gewesen wäre auf diese Weise etwas Vollkommenes in die Wege zu leiten, so habe ich doch endgültig davon abgesehen die Aufgabe zu teilen, in der Erwägung, daß ein Buch, das für den praktischen Gebrauch der Physiker bestimmt ist, auch wenn es wesentlich Mathematik enthält, nur von einem Physiker verfaßt sein darf, und daß bei einer Verteilung der Aufgabe auf mehrere Mitarbeiter die Homogenität zu sehr gelitten hätte. Ich hege die Hoffnung, daß, nachdem das Buch einmal in einem bestimmten Charakter geschrieben vorliegt, zu einer späteren Zeit durch die Mitarbeit von mehreren Fachkollegen die vorhandenen Mängel ausgeglichen werden.

Frankfurt a. M., September 1922.

ERWIN MADELUNG.

Vorwort zur dritten Auflage.

Seit dem Erscheinen der zweiten Auflage sind nunmehr 10 Jahre verflossen. In dieser Zeit hat sich die Notwendigkeit einer gründlichen Überarbeitung und Ergänzung des bisher Gebrachten immer mehr herausgestellt. Einerseits ist der Umfang des für den Physiker notwendigen mathematischen Rüstzeugs, besonders unter dem Einfluß der Wellenmechanik, nicht unwesentlich gestiegen, andererseits hat auch die innere Entwicklung des Verfassers ihn die Mängel der ersten Bearbeitungen immer stärker fühlen lassen. Wenn auch der ganze Charakter des Buches sich bewährt zu haben scheint, so war es doch in vielen Einzelheiten verbesserungs- und ergänzungsbedürftig.

Unter diesen Umständen war es sehr zu begrüßen, daß sich die Mitarbeit eines Mathematikers bot, der bereit und fähig war, sich der Eigenart des wesentlich für den Physiker bestimmten Buches anzupassen. Herr Dr. K. BOEHLE, damals Assistent am mathematischen Seminar der Universität Frankfurt, hat diese Mitarbeit übernommen. Er hat sich nicht damit begnügt, Ungenauigkeiten zu berichtigen und Lücken auszufüllen, sondern er hat größere Abschnitte ganz neu geschrieben. Wenn der mathematische Teil des Buches in der neuen Form jetzt auch von einem Mathematiker ohne Beanstandung aufgenommen werden kann, so ist das wesentlich ihm zu verdanken.

Ein zweiter wertvoller Mitarbeiter wurde Herr Dr. S. FLÜGGE, damals Assistent am Institut für theoretische Physik in Frankfurt. Er hat an der Neubearbeitung des ganzen Buches in allen seinen Teilen regsten Anteil genommen und auch einzelne Abschnitte neu geschrieben. Seine Tätigkeit ist für die Zuverlässigkeit des Buches von großer Bedeutung gewesen.

Wer die neue Auflage mit der letzten vergleicht, wird neben zahlreichen kleineren und größeren Verbesserungen und Ergänzungen, Umstellungen und Zusätzen auch mancherlei Neues finden. In der Mathematik sind die Entwicklungen nach orthogonalen Funktionensystemen und die Funktionen selbst systematischer behandelt als bisher. Die Abschnitte über Algebra, Integralgleichungen und Variationsrechnung sind wesentlich erweitert worden. Ganz neu ist ein Abschnitt über Gruppentheorie. In der Physik ist vieles besser geordnet. Die Quantentheorie erforderte eine ganz neue Darstellung. In einem Anhang ist vereinigt,

was bisher als Fremdkörper im Text stand, aber nicht gerne entbehrt werden konnte, wie Beispiele, Spezialfälle u. a.

Leider ist eine gewisse Vergrößerung des Umfanges nicht zu vermeiden gewesen. Wo es irgend ging, wurde versucht zu kürzen. Eine noch stärkere Konzentration wäre aber nicht möglich ohne die Verwendbarkeit zu beeinträchtigen. Maßgebend war allein die Absicht denen zu dienen, die auf dem weiten Feld der Physik arbeiten wollen.

Bei dieser Neu- und Wiedergeburt meines Buches habe ich vor allem meinen treuen Mitarbeitern Dr. BOEHLE und Dr. FLÜGGE Dank zu sagen für ihre hingebungsvolle Tätigkeit im Dienste der Sache. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. F. K. SCHMIDT, Jena, für manche freundlichen Ratschläge sowie Herrn Dr. W. KOFINK, Frankfurt, für seine wertvolle Hilfe beim Lesen der Korrekturen.

Frankfurt a. M., Dezember 1935.

ERWIN MADELUNG.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
Erster Teil.	
Mathematik.	
Das Begriffssystem der Mathematik	3
Erster Abschnitt: Differential- und Integralrechnung	4
A. Allgemeine Differentiationsregeln	4
1. Produkte und Quotienten S. 4. – 2. Funktion von Funktion S. 5. – 3. Umkehrfunktionen S. 5. – 4. Implizite Funktionen S. 5. – 5. Funktionen eines Parameters S. 5. – 6. Einführung neuer Variablen S. 5. – Differentiation von Integralen S. 6.	
B. Differentiations- und Integrationstabelle.	7
C. Integrationsmethoden	9
1. Partielle Integration S. 9. – 2. Rationale Funktionen. Zerlegung in Partialbrüche S. 9. – 3. Einführung neuer Veränderlicher S. 11. – 4. Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe S. 11.	
D. Bestimmte Integrale	11
1. Abschätzung S. 11. – 2. SCHWARZsche Ungleichung S. 11. – 3. Annäherung durch Summen S. 12. – 4. Formelschatz S. 12. – 5. Elliptische Integrale S. 5.	
E. Differenzenrechnung	16
Zweiter Abschnitt: Reihen und Reihenentwicklungen	19
A. Reihen.	19
1. Allgemeines S. 19. – 2. Konvergenzkriterien S. 20. – 3. Summation von Reihen S. 20.	
B. Reihenentwicklungen	22
1. Darstellung beliebig gegebener Funktionen durch bekannte Funktionen S. 22. – 2. Orthogonale Funktionensysteme S. 23. – 3. Entwicklungen nach Orthogonalsystemen S. 24. – Spezielle orthogonale Entwicklungen S. 26. – 5. Entwicklung in Potenzreihen S. 31.	
Dritter Abschnitt: Funktionen	34
A. Allgemeine Funktionentheorie	34
1. Bezeichnungen S. 34. – 2. Komplexe Größen S. 35. – 3. Analytische Funktionen S. 36. – 4. CAUCHYs Integralsatz S. 37. – 5. Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktionen S. 38. – 6. Berechnung	

bestimmter Integrale durch Integration im Komplexen S. 41. – 7. Abbildung durch komplexe Funktionen S. 42. – 8. Veranschaulichung komplexer Funktionen S. 43.

B. Spezielle Funktionen 45

 1. Definition der Funktionen S. 45. – 2. Klassifikation der Funktionen S. 45. – 3. Algebraische Funktionen S. 46. – 4. Elementare transzendente Funktionen S. 49. – 5. Systeme orthogonaler Polynome S. 54. – 6. Kugelfunktionen S. 60. – 7. Zylinderfunktionen S. 66. – 8. Gammafunktion S. 73. – 9. Elliptische Integrale und Funktionen S. 74.

Vierter Abschnitt: **Algebra** 79

A. Lineare Gleichungen 79

 1. Definitionen S. 79. – 2. Lösbarkeit und Lösungen S. 79. – 3. Lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten S. 81. – Ein wichtiges System S. 82.

B. Matrizen 83

 1. Definition, Bezeichnungen S. 83. – 2. Rechnen mit (endlichen) Matrizen S. 83. – 3. Determinanten, Rang, Spur S. 85. – 4. Besondere Matrizen S. 86. – 5. Matrizen mit Symmetrieeigenschaften S. 86. – 6. Transformation der Matrizen S. 88. – 7. Unendliche Matrizen S. 90.

C. Determinanten 92

 1. Definitionen S. 92. – 2. Determinantensätze S. 92. – 3. Multiplikation, Differentiation S. 93. – 4. Abschätzung und Ränderung von Determinanten S. 93. – 5. Spezielle Determinanten S. 94. – 6. Unendliche Determinanten S. 94. – 7. Praktische Berechnung S. 95.

D. Kombinatorik 95

 1. Permutationen S. 95. – 2. Kombinationen, Variationen S. 96. – 3. Binomialkoeffizienten S. 96.

Fünfter Abschnitt: **Transformationen** 97

A. Allgemeine Transformationen. 97

 1. Allgemeines S. 97. – 2. Geometrische Bedeutung S. 98. – 3. Invarianten S. 98.

B. Lineare Transformationen 99

 1. Lineare Räume S. 99. – 2. Allgemeine lineare Transformationen S. 100. – 3. Orthogonale Transformationen, Drehung S. 102. – 4. Transformation quadratischer und hermitescher Formen S. 103.

C. Berührungstransformation 104

 1. Im Zweidimensionalen S. 104. – 2. Im Mehrdimensionalen S. 108.

Sechster Abschnitt: **Vektoranalysis** 109

A. Koordinatenfreie Formulierung der Vektoranalysis im dreidimensionalen euklidischen Raum 109

 1. Definitionen S. 109. – 2. Vektoralgebra S. 110. – 3. Algebraische Vektorgleichungen S. 111. – 4. Integral- und Differentialausdrücke S. 112. – 5. Allgemeine Differentialformeln S. 116. – 6. Spezielle Vektorfelder S. 116. – 7. Der Vektor \mathbf{r} S. 118. – 8. Unstetige Vektorfelder S. 120. – 9. Lineare Vektorfeldfunktion S. 123. – 10. Tensoren S. 123. – 11. Der Gradiententensor S. 128. – 12. Tensoren höheren Grades S. 129. – 13. Transformation von Vektoren auf bewegtes Bezugssystem S. 129. – 14 Komplexe Vektoren S. 130.

	Seite
B. Koordinatenmäßige Formulierung der Vektoranalysis im n -dimensionalen Raume	131
1. Vektorkomponenten S. 131. – 2. Tensorkomponenten S. 133. –	
3. Tensoren höheren Grades S. 134. – 4. Transformationen S. 134. –	
5. Drei-Indizes-Symbole S. 135. – 6. Verjüngung und Erweiterung	
S. 136. – 7. Erweiterung und Verjüngung in Anwendung auf den Tensor	
g_{ik} S. 137. – 8. Orthogonale Koordinaten S. 138.	
Siebenter Abschnitt: Spezielle Koordinatensysteme	141
A. Zweidimensionale Systeme	141
1. Ebene Koordinatensysteme S. 141. – 2. Koordinaten auf Flächen	
S. 142.	
B. Dreidimensionale Systeme	143
1. Kartesische Koordinaten S. 143. – 2. Kugelkoordinaten S. 145. –	
3. Zylinderkoordinaten S. 146. – 4. Parabolische Koordinaten S. 147. –	
5. Elliptische Koordinaten S. 148.	
Achter Abschnitt: Gruppentheorie	152
A. Allgemeine Definitionen und Sätze	152
1. Gruppen S. 152. – 2. Untergruppen S. 154. – 3. Transformation,	
Normalteiler S. 155.	
B. Kontinuierliche Gruppen	156
C. Darstellungstheorie	157
1. Allgemeines über die Darstellungen einer Gruppe S. 157. –	
2. Hauptsätze über Darstellungen S. 159. – 3. Eigenwertprobleme und	
Darstellungen von Gruppen S. 161. – 4. Drehungsgruppen und ihre Dar-	
stellungen S. 163. – 5. Darstellungen und Charaktere der symmetrischen	
Gruppen S. 164.	
Neunter Abschnitt: Differentialgleichungen	166
A. Allgemeines über Differentialgleichungen	166
1. Einteilung der Differentialgleichungen S. 166. – 2. Lösungen	
von Differentialgleichungen S. 167. – 3. Lineare Probleme S. 170.	
B. Gewöhnliche Differentialgleichungen	170
1. Differentialgleichungen erster Ordnung S. 170. – 2. Lineare	
Differentialgleichungen erster Ordnung S. 173. – Besondere Formen von	
Differentialgleichungen S. 178. – 4. Lineare Differentialgleichung	
zweiter Ordnung S. 180. – 5. Systeme von Differentialgleichungen	
(simultane Differentialgleichungen) S. 185. – 6. Totale Differential-	
gleichungen (PFAFFSche Gleichungen) S. 187.	
C. Partielle Differentialgleichungen	189
1. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung S. 189. – 2. Parti-	
elle Differentialgleichungen zweiter Ordnung S. 191.	
D. Lineare Probleme	195
1. Allgemeines S. 195. – 2. Homogene Probleme zweiter Ordnung	
S. 197. – 3. Randwertprobleme elliptischer Gleichungen S. 201. –	
4. Anfangswertprobleme hyperbolischer Gleichungen S. 204.	
E. Störungsprobleme	205
1. Eindimensionale gestörte Probleme S. 205. – 2. Mehrdimensionale	
Störungsprobleme S. 208.	

	Seite
Zehnter Abschnitt: Integralgleichungen	209
A. Integralgleichungen zweiter Art	209
1. Allgemeiner Sachverhalt S. 209. – 2. Symmetrischer Kern, homogene Gleichung S. 210. – 3. Symmetrischer Kern, inhomogene Gleichung S. 211. – 4. Unsymmetrischer Kern S. 213.	
B. Integralgleichungen erster Art	214
Elfter Abschnitt: Variationsrechnung	215
A. Zurückführung auf Differentialgleichungen.	215
1. Variation ohne Nebenbedingungen S. 215. – 2. Variationen mit Nebenbedingungen S. 216.	
B. Direkte Lösungsmethoden	217
1. Das Ritzsche Verfahren S. 217. – 2. Zurückführung auf ein Problem von unendlich vielen Veränderlichen S. 220. – 3. Approximation durch gebrochene Linienzüge S. 221.	
Zwölfter Abschnitt: Wahrscheinlichkeitsrechnung	221
A. Grundbegriffe	221
B. Mittelwertbildung	222
C. Schwankungen	223
D. Wahrscheinlichkeitsnachwirkung	225
E. Korrelation.	225

Zweiter Teil.

Physik.

Das Begriffssystem der theoretischen Physik	227
Erster Abschnitt: Mechanik	229
A. Mechanik des einzelnen Massenpunktes	229
1. Grundgesetz und Begriffe S. 229. – 2. Verschiedene Formen des Grundgesetzes S. 231.	
B. Systeme von Massenpunkten	234
1. Allgemeines S. 234. – 2. Formale Zurückführung auf die Dynamik eines Massenpunktes S. 235. – 3. Gleichgewichtslagen und Schwingungen S. 235.	
C. Prinzipien der Mechanik	236
1. Differentialprinzipien S. 236. – 2. Variationsprinzipien S. 237.	
D. Starrer Körper	239
E. Mechanik der Continua	242
1. Kinematik S. 242. – 2. Kräfte S. 244. – 3. Elastizitätstheorie S. 244. – 4. Übergang zur Hydrodynamik S. 248. – 5. Hydrodynamik S. 249.	
Zweiter Abschnitt: Elektrodynamik (einschließlich Optik)	250
A. Allgemeine Theorie	250
1. Elektrostatik S. 250. – 2. Elektrokinetik S. 253. – 3. Magnetostatik S. 254. – 4. Elektromagnetik S. 255. – 5. Elektrodynamik S. 256. – 6. Kräfte S. 257. – 7. Energie S. 260.	

	Seite
B. Spezielle Fälle	262
1. Elektrodynamik quasistationärer Ströme S. 262. – 2. Elektrodynamik im homogenen Material S. 262. – 3. Elektrodynamik periodischer Felder im homogenen Material S. 265. – 4. Grundlagen der Optik S. 266. – 5. Wellen in anisotropen Medien (Kristalloptik) S. 268.	
Dritter Abschnitt: Relativitätstheorie	271
A. Spezielle Relativitätstheorie	271
1. Vierdimensionale Darstellung der Welt und das Relativitätsprinzip S. 271. – 2. LORENTZ-Transformation S. 272. – 3. Physikalische Bedeutung vierdimensionaler Vektoren und Tensoren S. 276. – 4. Elektrodynamik S. 278. – 5. Elektrodynamik in bewegten Medien S. 279. – 6. Dynamik des Massenpunktes S. 280.	
B. Allgemeine Relativitätstheorie	282
1. Grundlagen S. 282. – 2. Einige wichtige Lösungen der Feldgleichungen S. 295. – 3. Kosmologische Ansätze S. 287.	
Vierter Abschnitt: Quantentheorie	289
A. Vorläufige Formulierung	289
1. Mechanik S. 289. – 2. Elektrodynamik S. 291.	
B. Quantenmechanik	292
1. Unrelativistische Punktmechanik. Konservative und nicht-konservative Systeme S. 292. – 2. Relativistische Punktmechanik S. 303.	
C. Quantenoptik	308
1. Lichtquanten S. 308. – 2. Hohlraumstrahlung S. 309. – 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie S. 310.	
Fünfter Abschnitt: Thermodynamik	313
A. Grundbegriffe	313
B. Hauptsätze	314
C. Zustandsvariablen	316
D. Koeffizienten	318
E. Prozesse	318
F. Abgeschlossene Systeme	319
G. Spezialfälle	321
1. Ideale Gase S. 321. – 2. Gemische idealer Gase S. 323. – 3. Hohlraumstrahlung S. 324.	
H. Zustandsgleichung	324
I. Spezielle Gleichgewichte	326
K. Phasentheorie	327
L. Massenwirkungsgesetz	328
M. Dritter Hauptsatz der Thermodynamik	329
Sechster Abschnitt: Statistische Methoden	331
A. Diskrete Zustände	331
1. Allgemeines S. 331. – 2. Thermodynamisches Gleichgewicht S. 333.	
B. Statistische Mechanik	335
1. Klassische Mechanik S. 335. – 2. Zelleneinteilung des Phasenraums S. 336. – 3. Das kinetische Modell des idealen Gases S. 337.	
C. FERMI- und BOSE-Statistik	341

Anhang.

1. FOURIER-Integrale S. 344. – 2. Potenzreihenentwicklung S. 344. – 3. Beispiel für komplexe Integration S. 347. – 4. Harmonischer Oszillator S. 348. – 5. Planetenbewegung S. 349. – 6. Zur Vektorsymbolik S. 350. – 7. Drei-Indizes-Symbole S. 351. – 8. Erzwungene Schwingung S. 351. – 9. Vektoranalytische Behandlung der Planetenbewegung S. 352. – 10. Magnetischer Kreis S. 353. – 11. Elektrische Maßsysteme S. 354. – 12. Die drei Einsteineffekte S. 355. – 13. KEPLER-Problem S. 356. – 14. Potentialschwelle S. 357. – 15. Atombau (Elektronenkatalog) S. 359. – 16. Elektronengas S. 359. – 17. Brownsche Bewegung S. 361. – 18. Schwankung makroskopischer Größen S. 362. – 19. Binomialkoeffizienten S. 363. – 20. Reihenoeffizienten S. 364. – 21. Elektrizitätsmengen-Einheiten S. 365. – 22. Energieeinheiten S. 365. – 23. Universelle Konstanten S. 366.

Literaturverzeichnis	367
Sachverzeichnis	372