ERGEBNISSE DER
ANGEWANDTEN MATHEMATIK
UNTER MITWIRKUNG DER SCHRIFTLEITUNG DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
HERAUSGEGEBEN VON F. LÖSCH

1

DIE PRAKTISCHE BEHANDLUNG VON INTEGRAL-GLEICHUNGEN

VON

H. BÜCKNER

MIT 1 TEXTABBILDUNG

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

ISBN 978-3-662-01395-3 ISBN 978-3-662-01394-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-01394-6

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag in Berlin 1952.
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1952

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung V

I. Abschnitt. Formeln und Sätze aus der Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen 1

§ 1. Fredholmsche Integralgleichungen, Systeme und gemischte Gleichungen, Integraloperatoren 1

§ 2. Der reziproke Kern und die Fredholmschen Formeln . 4

§ 3. Orthogonale und biorthogonale Systeme von Funktionen; die Nullstellen der Fredholmschen Determinante . . . 5

§ 4. Spezielle Integraloperatoren 8

§ 5. Zusammengesetzte Operatoren 10

II. Abschnitt. Die Berechnung von Eigenwerten mit Hilfe von Formeln und Variationsprinzipien. Einschließungssätze 12

§ 6. Berechnung der Eigenwerte aus der Fredholmschen Determinante 12

§ 7. Die Potenzsummen der reziproken Eigenwerte 14

§ 8. Extremaleigenschaften der Eigenwerte eines Hermiteschen Kerns. 1. Einschließungssatz 17

§ 9. Extremaleigenschaften rational transformierter Eigenwerte Hermitescher Integraloperatoren und allgemeine Einschließungssätze 19

§ 10. Dreigliedrige Einschließungspolynome. Verträgliche Spektra 28

III. Abschnitt. Iterationsverfahren 37

§ 11. Asymptotisches Gesetz der klassischen Iteration 37

§ 12. Der Begriff der Beteiligung 40

§ 13. Anwendung des klassischen Iterationsverfahrens auf die inhomogene Integralgleichung 42

§ 14. Die Berechnung des 1. Eigenwertes eines beliebigen Kerns für den Fall $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ 43

§ 15. Berechnung des 1. Eigenwertes beim Hermiteschen Kern 46

§ 16. Die Berechnung der höheren Eigenwerte aus Iterationsfolgen, an deren Ausgangsfunktion λ_1 beteiligt ist 50

§ 17. Die Abspaltung von Eigenwerten 56

§ 18. Beispiele zum Abspaltungssatz für Integraloperatoren . . . 59

§ 19. Gemischte Iteration für die inhomogene Integralgleichung 63

§ 20. Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen nach der gemischten Iteration 67

§ 21. Ein stets anwendbares Iterationsverfahren 68

§ 22. Gebrochen lineare Iteration 71

§ 23. Quadratisch konvergente Iteration 73

IV. Abschnitt. Ersatz des Kernes und der Störfunktion 74

§ 24. Die Abschätzungen von Tricomi 74

§ 25. Abschätzungen für die Änderungen, die die Eigenwerte Hermitescher Kerne erfahren 77

§ 26. Abschätzung der Änderung von Eigenfunktionen 79
§ 27. Konvergenzsätze 81
§ 28. Analytische Störungsrechnung für Hermitesche Kerne. Existenzsätze 84
§ 29. Anwendung der Störungsrechnung. Der ungestörte Eigenwert ist einfach 87
§ 30. Abschätzungen für die Störung beim einfachen Eigenwert 89
§ 31. Störung eines mehrfachen Eigenwerts 92
§ 32. Störungstheorie der inhomogenen Integralgleichung . . . 95
§ 33. Ersatz durch entartete Kerne 96
§ 34. Das Variationsproblem von E. Schmidt für den entarteten Ersatzkern 98
§ 35. Die Eigenfunktionen werden durch Linearkombinationen gegebener Funktionen approximiert 99
§ 36. Die Lösung der inhomogenen Integralgleichung wird durch eine Linearkombination gegebener Funktionen approximiert 102
§ 37. $K^*(s, t) = K(s, t)$ für ein Punktgitter 104
§ 38. Die Analogiemethoden 105
§ 39. Konvergenzbetrachtungen zu den Analogiemethoden. Formale Analogie zur Störungsrechnung 109
§ 40. Anwendung der Konvergenzaussagen 111

V. Abschnitt. Spezielle Kerne 115
§ 41. Kerne $K(s, t)$ mit verschiedenen Bildungsgesetzen in den Bereichen $s \leq t$ und $s > t$ 115
§ 42. Die Volterrasche Integralgleichung vom Faltungstyp . . 117
§ 43. Kerne, die sich physikalisch-technisch realisieren lassen . 121

Literaturverzeichnis 123

Berichtigungen.

Seite 20, Zeile 3: Der Nebensatz „$p(x)$ und $g(x) = 1 - q(x)$ teilerfremd" ist zu streichen.

Seite 22, Zeile 1 und 2 von oben sind zu streichen.

Seite 22, Zeile 7: Vor dem Wort „nichts" ist einzufügen: „bis auf Nullstellen von $g(x)$".

Einleitung.

Die praktische Behandlung der Integralgleichungen bildet einen verhältnismäßig jungen, noch im Wachstum begriffenen Zweig der praktischen Mathematik. Immerhin hat die Entwicklung praktischer Methoden für die linearen Integralgleichungen 2. Art (auch Fredholmsche Integralgleichungen genannt) heute einen Stand erreicht, der es rechtfertigt, die bisher bekannt gewordenen Verfahren zu ordnen und ihre Grundlagen und Zusammenhänge nach Möglichkeit darzulegen. Dies ist der Gegenstand dieses Berichts.

Es zeigt sich, daß die weitaus größte Zahl der praktischen Verfahren zu zwei großen Kategorien gehört, nämlich zu den Iterationsverfahren und zu solchen, die sich auf einen Ersatz des Kerns der Integralgleichung zurückführen lassen. Da Iteration und Kernersatz nicht auf Fredholmsche Gleichungen beschränkt sind, so ist zu hoffen, daß die Begründung beider Methoden für Fredholmsche Gleichungen auch von Nutzen für die praktische Behandlung anderer Integralgleichungstypen sein wird, insbesondere für die linearen Integralgleichungen 1. Art, die in diesem Bericht nicht behandelt werden. Obwohl es in vielen Fällen keine Schwierigkeit bereitet, die in diesem Bericht behandelten Methoden auf Integralgleichungen 1. Art anzuwenden, so ist doch die Entwicklung von Verfahren für diesen Typ noch zu sehr im Flusse, um ihre Zusammenstellung und Ordnung nicht als verfrüht erscheinen zu lassen. Immerhin sei in diesem Zusammenhang auf einige wichtige Literatur hingewiesen, nämlich auf die Bücher und Arbeiten [20], [30], [36], [44], [61], [63], [71], [78], [80] und [83]. Hier wie auch im ganzen Bericht beziehen sich Zahlen in eckigen Klammern auf das am Ende befindliche Literaturverzeichnis.

Die Einschließungssätze des II. Abschnitts richten sich zu einem großen Teil nach Ergebnissen von Herrn H. Wielandt, Tübingen. Insbesondere versetzten mich seine freundschaftlichen Mitteilungen über bisher noch unveröffentlichte Ergebnisse zu den Einschließungspolynomen in die Lage, den Bericht auf den letzten Stand der Forschung zu bringen. Für dieses Entgegenkommen und für die freundliche Durchsicht auch anderer Teile des Berichts möchte ich Herrn Wielandt herzlich danken.

Die Eigenart der Methoden, über die dieses Heft berichtet, tritt ungeschmälert hervor, wenn man sich auf Gleichungen mit Kernen von nur zwei unabhängigen Variablen beschränkt. Es genügt ferner, sich mit stückweise stetigen Funktionen zu befassen. Wenn daher im folgenden Funktionen $f(s)$ von einer und $F(s, t)$ von zwei Variablen gegeben sind, so sollen, wenn nichts anderes bemerkt wird, die Variablen reell sein und die Funktionen den nachstehenden Beschränkungen unterliegen:

1. $f(s)$ ist in einem Intervall $a \leqq s \leqq b$, $F(s, t)$ in einem Rechteck $a \leqq s \leqq b, c \leqq t \leqq d$ fast überall definiert. Die Funktionswerte dürfen komplex sein.
2. $|f(s)|$ und $|F(s, t)|$ besitzen endliche obere Schranken im Definitionsbereich.
3. Die Stellen der Undefiniertheit und Unstetigkeit bestehen bei $f(s)$ aus endlich vielen Punkten; bei $F(s, t)$ liegen sie auf endlich vielen glatten Kurven, deren jede von den Geraden $s =$ const. und $t =$ const. in höchstens endlich vielen Punkten getroffen wird oder ganz auf einer dieser Geraden liegt.

Die so eingeschränkten Funktionen werden als zulässig bezeichnet. Unterscheiden sich zulässige Funktionen nicht in den Stetigkeitsstellen, so werden sie nicht als wesentlich verschieden angesehen. — An sich lassen sich die meisten der Ergebnisse, die in diesem Bericht beschrieben werden, auf quadratisch integrierbare Funktionen im Sinne von Lebesgue ausdehnen. Die praktischen Anwendungen machen dies aber kaum erforderlich.

Ich habe mich bemüht, ein möglichst vollständiges Bild von den bisher entwickelten Methoden zu bieten. In einigen Fällen, z. B. bei den Aufsätzen [3], [28] und [68] war es mir bisher noch nicht möglich, die Literatur in die Hand zu bekommen, auf die ich bei der Suche nach einschlägigen Arbeiten aufmerksam geworden war. In anderen Fällen, z. B. bei der im Nachtrag erwähnten Literatur, habe ich beim Lesen der Korrektur Hinweise eingefügt.

Herausgeber und Verlag haben mich bei der Beschaffung schwer zugänglicher Literatur unterstützt. Nicht nur dafür, sondern auch für das mir in jeder anderen Richtung bewiesene Entgegenkommen möchte ich an dieser Stelle herzlich danken. Mein Dank gebührt ferner Herrn J. Weissinger, Hamburg, für die Liebenswürdigkeit, die Korrektur mitgelesen zu haben.

Berlin, Mathematisches Institut der Technischen Universität,
im November 1951.

Hans Bückner.