DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

BAND 77

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN

VON

DR. DR. H. C. HEINRICH BEHNKE

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT MÜNSTER

UND

DR. FRIEDRICH SOMMER

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG

MIT 59 ABBILDUNGEN

ZWEITE VERÄNDERTE AUFLAGE

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

GESCHÄFTSFÜHRENDE HERAUSGEBER

PROF. DR. B. ECKMANN
EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

PROF. DR. B. L. VAN DER WAERDEN
MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

ISBN 978-3-662-01317-5 ISBN 978-3-662-01316-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-01316-8

URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI SPRINGER-VERLAG OHG. BERLIN. GOTTINGEN. HEIDELBERG 1962
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 2ND EDITION 1962

LIBRARY OF CONGRESS CATALOG CARD NUMBER 62—17860

BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Die vorliegende Darstellung der klassischen Funktionentheorie ist aus Nachschriften, die wir seit geraumer Zeit von unseren Vorlesungen anfertigen ließen, entstanden. Hieraus ergibt sich schon, an welche Leser wir zunächst gedacht hatten. Es sind die Studenten, die, mit welchem Ziel auch immer, sich einer mehrsemestrigen Ausbildung in der Funktionentheorie unterziehen wollen. Dabei darf dann vorausgesetzt werden, daß ihnen die Infinitesimalrechnung in der strengen Form vertraut geworden ist, in der sie heute für den Anfänger an den europäischen Universitäten gelehrt zu werden pflegt. Die zahlreichen Beispiele in den einleitenden Kapiteln sind vor allem mit Rücksicht auf die Studenten eingefügt worden.

Nun wurde aber unser Manuskript immer umfangreicher. Wir verfolgten nämlich die Absicht, die Grundlagen der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen vollständig zu bringen. Das bedeutete, daß wir die Theorie auf den kompakten Riemannschen Flächen bis einschließlich der Abelschen Integrale zu behandeln hatten. Die Theorie auf den nicht kompakten Flächen war entsprechend bis einschließlich der Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes (des allgemeinen Approximationssatzes) aufzubauen. So mußten wir in wachsendem Maße auch an den Leser denken, der nach einer abgeschlossenen mathematischen Ausbildung das Buch zur Hand nimmt, um es wegen einer speziellen Frage zu konsultieren, und sich nicht der Mühe unterziehen kann, es von Anfang an zu lesen. An der Brauchbarkeit des Buches für den Fachmann im weiteren Sinne bei seiner täglichen Arbeit war uns besonders gelegen.

Häufiger ergaben sich Berührungspunkte mit anderen Disziplinen, wie der Verbandstheorie, der Algebra, der algebraischen Geometrie, der Theorie linearer Vektorräume, ohne daß wir gezwungen waren, ihre Ergebnisse unbewiesen zu übernehmen. Eine Ausnahme macht hier lediglich die Flächentopologie mit ihren einleuchtenden Aussagen, deren subtile Beweise aber, ganz aus der Funktionentheorie herausfallend, den Umfang des Buches zu sehr vergrößert hätten. So haben wir im ersten Kapitel u. a. auf den Beweis des Jordanschen Kurvensatzes verzichtet und auch im Anhang des fünften Kapitels geläufige Tatsachen aus der elementaren Flächentopologie ohne Beweis benutzt.

Der ältere der beiden Verfasser möchte an dieser Stelle nicht versäumen, seiner beiden Lehrer

CONSTANTIN CARATHÉODORY

und

ERICH HECKE

zu gedenken. Mit CARATHÉODORY stand er über zwanzig Jahre in einer nie abbrechenden Aussprache und Korrespondenz zu den verschiedensten Fragen der Funktionentheorie. ERICH HECKE schuldet er die dauernde Mahnung, die wesentliche Erkenntnis über das logisch Formale zu stellen.

Im übrigen aber gehen natürlich die geistigen Wurzeln dieser Darstellung, wie die vieler Darstellungen aus der Funktionentheorie, besonders auf das Vermächtnis von RIEMANN und WEIERSTRASS zurück. Es ist den Verfassern weniger durch die Originalschriften als schon in der abgewandelten Form überliefert, in der es in den großen deutschsprachigen Lehrbüchern der letzten fünfzig Jahre dargestellt ist. Das sind vor allem die Werke von OSGOOD (die erste Auflage erschien 1906), BIEBERBACH (1921) und HURWITZ-COURANT (1922). Aus jedem dieser Bücher haben wir vieles gelernt, und gegen jedes grenzt sich unsere Darstellung ab. So ist gegenüber dem Band von HURWITZ-COURANT, der von den großen Meistern der Funktionentheorie des 19. Jahrhunderts noch am unmittelbarsten beeinflußt ist, zu erwähnen, daß uns die Verschmelzung der Riemannschen und Weierstraßschen Auffassung, die axiomatische Einführung der Riemannschen Flächen und die Aufstellung der Abelschen Integrale ohne Rückgriff auf die Dirichletschen Integrale und damit die reelle Analysis (was erst durch die Untersuchungen von O. TEICHMÜLLER ermöglicht ist) wesentliche Anliegen waren. Maßgeblich war uns sodann selbstverständlich das Meisterwerk des jungen HERMANN WEYL: „Die Idee der Riemannschen Fläche“.

In einem besonderen Sinn sind die Verfasser auch durch die heutige Forschung beeinflußt worden. In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen hat auch die Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen als ihr einfachster Spezialfall eine neue Gestalt gefunden. Wenn nun auch in diesem Buch die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen nicht behandelt wird, so haben die Verfasser als Mitarbeiter an dieser schnell wachsenden Theorie doch an manchen Stellen die dort gewonnene Sicht ausgenutzt, um sine ira et studio die ihnen für dieses Lehrbuch am geeignetsten erscheinende Darstellung zu finden.

H. BEHNKE
F. SOMMER

Münster (Westf.), 1. August 1955
Schloßplatz 2

Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage hat gegenüber der ersten mannigfache Änderungen erfahren. Sie betreffen vor allem die Darstellung der Grundlagen im Kapitel I: „Analysis der komplexen Zahlen", die „Theorie der normalen Familien" in Kapitel II und III und den „Aufbau der Riemannschen Flächen" in Kapitel V.

So haben wir im ersten Kapitel die Topologie der komplexen Ebene in die allgemeine Begriffsbildung der Hausdorffschen und speziell der metrischen Räume eingebaut. Neben einem Gewinn an Durchsichtigkeit ersparen wir uns später beim Aufbau der Riemannschen Flächen sowie bei der Theorie der Randabbildungen entsprechende Erwägungen. (Wegen der Sprachverwirrung, die heute mit dem Wort „kompakt" entstanden ist, unterscheiden wir zunächst „*folgen-*" und „*überdeckungs-kompakt*". Wir weisen dann die Äquivalenz dieser Begriffe in Räumen mit abzählbarer Basis nach und verwenden danach nur noch das Wort „*kompakt*".) Die euklidische Metrik der endlichen Ebene und die chordale Metrik der geschlossenen Ebene werden als Spezialfälle allgemeiner Metriken behandelt, jedoch führen wir gelegentlich die Beweise wegen der größeren Anschaulichkeit auch in einer dieser speziellen Metriken durch. Bei den stetigen Abbildungen halten wir es ähnlich. Wir beginnen mit der Abbildung allgemeiner Mengen und schließen mit der Abbildung durch komplexe Funktionen. Das Buch soll so an innerer Geschlossenheit gewinnen.

Eine zweite Änderung betrifft die Grundlagen der normalen Familien von komplexen Funktionen (s. I, 10), speziell die der normalen Familien holomorpher Funktionen (s. II, 7). Wir haben die Carathéodorysche Darstellung – weil mehr der reellen Funktionentheorie angepaßt – zu einem Teil aufgegeben und erreichen mit der größeren Anlehnung an die klassischen Ideen von MONTEL eine Kürzung. (Das betrifft auch Beweise in den Kapiteln II und III.)

Schließlich haben wir in Kapitel V die allgemeine Einführung der Riemannschen Flächen in Anlehnung an das erste Kapitel neu dargestellt.

Die übrigen Teile des Buches erfahren nur Änderungen geringeren Ausmaßes. Kleinere Ergänzungen betreffen das Transformationsgesetz für Kurvenintegrale (I, 8), die Berechnung des Flächeninhalts eines Gebietes (I, 9), das Rechnen mit Potenzreihen (II, 4), die Laurent-trennung (III, 3), die Holomorphie- und Meromorphiegebiete (III, 8), den Rungeschen Satz (III, 10) und die hyperelliptischen Riemannschen Flächen (VI, 5).

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage ist uns manche fruchtbare Kritik zugegangen, die zu berücksichtigen wir uns bemüht haben. So ist es uns eine angenehme Pflicht, allen zu danken, die durch ihre Zuschriften, Anregungen und ihre Mitarbeit bei der Neugestaltung des Buches geholfen haben. Unser besonderer Dank gilt denjenigen, die mit uns häufig über die Darstellung einzelner Teile diskutiert haben. Das betrifft die Herren Professoren Dr. H. GRAUERT, Dr. R. REMMERT, Dr. K. STEIN und Dr. H. TIETZ sowie die Herren Dr. H. HOLMANN, D. KAHLE, Dr. K. KOPFERMANN, Dr. N. KUHLMANN, Dr. TH. MEIS, Dr. G. SCHEJA und Dr. K. SPALLEK. Daß wir nicht immer zu einer Übereinstimmung gekommen sind, ist selbstverständlich. Beim Lesen der Korrekturen haben uns viele unserer Mitarbeiter in Münster und Würzburg geholfen. Dem Verlag sind wir wieder für die sorgfältige Ausstattung des Buches und die Berücksichtigung aller unserer Wünsche zu besonderem Dank verpflichtet.

H. BEHNKE
F. SOMMER

Münster (Westf.), Würzburg, 28. Oktober 1961

Zur Technik der Darstellung

Das Buch ist eingeteilt in Kapitel und Paragraphen. Innerhalb eines Kapitels sind die Sätze durchnumeriert, Formeln dagegen nur innerhalb eines Paragraphen. In Hinweisen auf andere Stellen des Buches wird das Kapitel mit römischen, der Paragraph mit arabischen Ziffern vorangestellt, also z. B.: (III, 2, Satz 5) für Satz 5 in § 2 des dritten Kapitels oder: (II, 3, (11)) für Formel (11) in § 3 des zweiten Kapitels. Bei Hinweisen im selben Kapitel fehlt die römische Ziffer, z. B.: (2, Satz 5) und bei Hinweisen im selben Paragraphen auch die arabische Ziffer, z. B.: (s. Satz 5).

Sätze und neue Begriffe werden durch Kursivdruck hervorgehoben, Beispiele und ergänzende Ausführungen in Kleindruck gesetzt. Die Umkehrfunktion zu einer Funktion $w = f(z)$ wird mit $z = \check{f}(w)$ bezeichnet.

Literaturangaben werden am Ende der zugehörigen Paragraphen gemacht, und Hinweise darauf beziehen sich auf die Angaben am Ende desselben Paragraphen.

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel

Analysis der komplexen Zahlen

Zweites Kapitel

Die Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen

Drittes Kapitel

Die analytischen Funktionen, ihre singulären Stellen und ihre Entwicklungen

Viertes Kapitel

Konforme Abbildungen

Fünftes Kapitel

Der Gesamtverlauf der analytischen Funktionen und ihre Riemannschen Flächen

Sechstes Kapitel

Funktionen auf Riemannschen Flächen

THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN