

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

J.L. DOOB · R. GRAMMEL · E. HEINZ
F. HIRZEBRUCH · E. HOPF · H. HOPF · W. MAAK
W. MAGNUS · F.K. SCHMIDT · K. STEIN

GESCHAFTSFÜHRENDE HERAUSGEBER

B. ECKMANN UND B. L. VAN DER WAERDEN
ZÜRICH

BAND 77



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

THEORIE DER ANALYTISCHEN
FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN
VERÄNDERLICHEN

VON

DR. DR. H. C. HEINRICH BEHNKE

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT MUNSTER

UND

DR. FRIEDRICH SOMMER

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG

MIT 59 ABBILDUNGEN

ZWEITE VERÄNDERTE AUFLAGE



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

GESCHÄFTSFÜHRENDE HERAUSGEBER

PROF. DR. B. ECKMANN

EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

PROF. DR. B. L. VAN DER WAERDEN

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

ISBN 978-3-662-01317-5 ISBN 978-3-662-01316-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-01316-8

ALLE RECHTE,
INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN,
VORBEHALTEN

OHNE AUSDRÜCKLICHE GENEHMIGUNG DES VERLAGES
IST ES AUCH NICHT GESTATTET, DIESES BUCH ODER TEILE DARAUS
AUF PHOTOMECHANISCHEM WEGE (PHOTOKOPIE, MIKROKOPIE)
ODER AUF ANDERE ART ZU VERVIELFÄLTIGEN

© BY SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG 1955 AND 1962
URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI SPRINGER-VERLAG OHG. BERLIN, GOTTINGEN, HEIDELBERG 1962
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 2ND EDITION 1962

LIBRARY OF CONGRESS CATALOG CARD NUMBER 62—17860

BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Die vorliegende Darstellung der klassischen Funktionentheorie ist aus Nachschriften, die wir seit geraumer Zeit von unseren Vorlesungen anfertigen ließen, entstanden. Hieraus ergibt sich schon, an welche Leser wir zunächst gedacht hatten. Es sind die Studenten, die, mit welchem Ziel auch immer, sich einer mehrsemestrigen Ausbildung in der Funktionentheorie unterziehen wollen. Dabei darf dann vorausgesetzt werden, daß ihnen die Infinitesimalrechnung in der strengen Form vertraut geworden ist, in der sie heute für den Anfänger an den europäischen Universitäten gelehrt zu werden pflegt. Die zahlreichen Beispiele in den einleitenden Kapiteln sind vor allem mit Rücksicht auf die Studenten eingefügt worden.

Nun wurde aber unser Manuskript immer umfangreicher. Wir verfolgten nämlich die Absicht, die Grundlagen der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen vollständig zu bringen. Das bedeutete, daß wir die Theorie auf den kompakten Riemannschen Flächen bis einschließlich der Abelschen Integrale zu behandeln hatten. Die Theorie auf den nicht kompakten Flächen war entsprechend bis einschließlich der Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes (des allgemeinen Approximationsatzes) aufzubauen. So mußten wir in wachsendem Maße auch an den Leser denken, der nach einer abgeschlossenen mathematischen Ausbildung das Buch zur Hand nimmt, um es wegen einer speziellen Frage zu konsultieren, und sich nicht der Mühe unterziehen kann, es von Anfang an zu lesen. An der Brauchbarkeit des Buches für den Fachmann im weiteren Sinne bei seiner täglichen Arbeit war uns besonders gelegen.

Häufiger ergaben sich Berührungspunkte mit anderen Disziplinen, wie der Verbandstheorie, der Algebra, der algebraischen Geometrie, der Theorie linearer Vektorräume, ohne daß wir gezwungen waren, ihre Ergebnisse unbewiesen zu übernehmen. Eine Ausnahme macht hier lediglich die Flächentopologie mit ihren einleuchtenden Aussagen, deren subtile Beweise aber, ganz aus der Funktionentheorie herausfallend, den Umfang des Buches zu sehr vergrößert hätten. So haben wir im ersten Kapitel u. a. auf den Beweis des Jordanschen Kurvensatzes verzichtet und auch im Anhang des fünften Kapitels geläufige Tatsachen aus der elementaren Flächentopologie ohne Beweis benutzt.

Der ältere der beiden Verfasser möchte an dieser Stelle nicht versäumen, seiner beiden Lehrer

CONSTANTIN CARATHÉODORY

und

ERICH HECKE

zu gedenken. Mit CARATHÉODORY stand er über zwanzig Jahre in einer nie abbrechenden Aussprache und Korrespondenz zu den verschiedensten Fragen der Funktionentheorie. ERICH HECKE schuldet er die dauernde Mahnung, die wesentliche Erkenntnis über das logisch Formale zu stellen.

Im übrigen aber gehen natürlich die geistigen Wurzeln dieser Darstellung, wie die vieler Darstellungen aus der Funktionentheorie, besonders auf das Vermächtnis von RIEMANN und WEIERSTRASS zurück. Es ist den Verfassern weniger durch die Originalschriften als schon in der abgewandelten Form überliefert, in der es in den großen deutschsprachigen Lehrbüchern der letzten fünfzig Jahre dargestellt ist. Das sind vor allem die Werke von OSGOOD (die erste Auflage erschien 1906), BIEBERBACH (1921) und HURWITZ-COURANT (1922). Aus jedem dieser Bücher haben wir vieles gelernt, und gegen jedes grenzt sich unsere Darstellung ab. So ist gegenüber dem Band von HURWITZ-COURANT, der von den großen Meistern der Funktionentheorie des 19. Jahrhunderts noch am unmittelbarsten beeinflusst ist, zu erwähnen, daß uns die Verschmelzung der Riemannschen und Weierstraßschen Auffassung, die axiomatische Einführung der Riemannschen Flächen und die Aufstellung der Abelschen Integrale ohne Rückgriff auf die Dirichlettschen Integrale und damit die reelle Analysis (was erst durch die Untersuchungen von O. TEICHMÜLLER ermöglicht ist) wesentliche Anliegen waren. Maßgeblich war uns sodann selbstverständlich das Meisterwerk des jungen HERMANN WEYL: „Die Idee der Riemannschen Fläche“.

In einem besonderen Sinn sind die Verfasser auch durch die heutige Forschung beeinflusst worden. In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen hat auch die Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen als ihr einfachster Spezialfall eine neue Gestalt gefunden. Wenn nun auch in diesem Buch die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen nicht behandelt wird, so haben die Verfasser als Mitarbeiter an dieser schnell wachsenden Theorie doch an manchen Stellen die dort gewonnene Sicht ausgenutzt, um sine ira et studio die ihnen für dieses Lehrbuch am geeignetsten erscheinende Darstellung zu finden.

H. BEHNKE

F. SOMMER

Münster (Westf.), 1. August 1955

Schloßplatz 2

Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage hat gegenüber der ersten mannigfache Änderungen erfahren. Sie betreffen vor allem die Darstellung der Grundlagen im Kapitel I: „Analysis der komplexen Zahlen“, die „Theorie der normalen Familien“ in Kapitel II und III und den „Aufbau der Riemannschen Flächen“ in Kapitel V.

So haben wir im ersten Kapitel die Topologie der komplexen Ebene in die allgemeine Begriffsbildung der Hausdorffschen und speziell der metrischen Räume eingebaut. Neben einem Gewinn an Durchsichtigkeit ersparen wir uns später beim Aufbau der Riemannschen Flächen sowie bei der Theorie der Randabbildungen entsprechende Erwägungen. (Wegen der Sprachverwirrung, die heute mit dem Wort „kompakt“ entstanden ist, unterscheiden wir zunächst „folgen-“ und „überdeckungskompakt“. Wir weisen dann die Äquivalenz dieser Begriffe in Räumen mit abzählbarer Basis nach und verwenden danach nur noch das Wort „kompakt“.) Die euklidische Metrik der endlichen Ebene und die chordale Metrik der geschlossenen Ebene werden als Spezialfälle allgemeiner Metriken behandelt, jedoch führen wir gelegentlich die Beweise wegen der größeren Anschaulichkeit auch in einer dieser speziellen Metriken durch. Bei den stetigen Abbildungen halten wir es ähnlich. Wir beginnen mit der Abbildung allgemeiner Mengen und schließen mit der Abbildung durch komplexe Funktionen. Das Buch soll so an innerer Geschlossenheit gewinnen.

Eine zweite Änderung betrifft die Grundlagen der normalen Familien von komplexen Funktionen (s. I, 10), speziell die der normalen Familien holomorpher Funktionen (s. II, 7). Wir haben die Carathéodorysche Darstellung – weil mehr der reellen Funktionentheorie angepaßt – zu einem Teil aufgegeben und erreichen mit der größeren Anlehnung an die klassischen Ideen von MONTEL eine Kürzung. (Das betrifft auch Beweise in den Kapiteln II und III.)

Schließlich haben wir in Kapitel V die allgemeine Einführung der Riemannschen Flächen in Anlehnung an das erste Kapitel neu dargestellt.

Die übrigen Teile des Buches erfahren nur Änderungen geringeren Ausmaßes. Kleinere Ergänzungen betreffen das Transformationsgesetz für Kurvenintegrale (I, 8), die Berechnung des Flächeninhalts eines Gebietes (I, 9), das Rechnen mit Potenzreihen (II, 4), die Laurenttrennung (III, 3), die Holomorphie- und Meromorphiegebiete (III, 8),

den Rungeschen Satz (III, 10) und die hyperelliptischen Riemannschen Flächen (VI, 5).

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage ist uns manche fruchtbare Kritik zugegangen, die zu berücksichtigen wir uns bemüht haben. So ist es uns eine angenehme Pflicht, allen zu danken, die durch ihre Zuschriften, Anregungen und ihre Mitarbeit bei der Neugestaltung des Buches geholfen haben. Unser besonderer Dank gilt denjenigen, die mit uns häufig über die Darstellung einzelner Teile diskutiert haben. Das betrifft die Herren Professoren Dr. H. GRAUERT, Dr. R. REMMERT, Dr. K. STEIN und Dr. H. TIETZ sowie die Herren Dr. H. HOLMANN, D. KAHLE, Dr. K. KOPFERMANN, Dr. N. KUHLMANN, Dr. TH. MEIS, Dr. G. SCHEJA und Dr. K. SPALLEK. Daß wir nicht immer zu einer Übereinstimmung gekommen sind, ist selbstverständlich. Beim Lesen der Korrekturen haben uns viele unserer Mitarbeiter in Münster und Würzburg geholfen. Dem Verlag sind wir wieder für die sorgfältige Ausstattung des Buches und die Berücksichtigung aller unserer Wünsche zu besonderem Dank verpflichtet.

H. BEHNKE

F. SOMMER

Münster (Westf.), Würzburg, 28. Oktober 1961

Zur Technik der Darstellung

Das Buch ist eingeteilt in Kapitel und Paragraphen. Innerhalb eines Kapitels sind die Sätze durchnummeriert, Formeln dagegen nur innerhalb eines Paragraphen. In Hinweisen auf andere Stellen des Buches wird das Kapitel mit römischen, der Paragraph mit arabischen Ziffern vorangestellt, also z. B.: (III, 2, Satz 5) für Satz 5 in § 2 des dritten Kapitels oder: (II, 3, (11)) für Formel (11) in § 3 des zweiten Kapitels. Bei Hinweisen im selben Kapitel fehlt die römische Ziffer, z. B.: (2, Satz 5) und bei Hinweisen im selben Paragraphen auch die arabische Ziffer, z. B.: (s. Satz 5).

Sätze und neue Begriffe werden durch Kursivdruck hervorgehoben, Beispiele und ergänzende Ausführungen in Kleindruck gesetzt. Die Umkehrfunktion zu einer Funktion $w = f(z)$ wird mit $z = \check{f}(w)$ bezeichnet.

Literaturangaben werden am Ende der zugehörigen Paragraphen gemacht, und Hinweise darauf beziehen sich auf die Angaben am Ende desselben Paragraphen.

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel

Analysis der komplexen Zahlen

§ 1. Die komplexen Zahlen	1
§ 2. Der unendlich ferne Punkt und der chordale Abstand	13
§ 3. Grundlagen aus der mengentheoretischen Topologie	20
§ 4. Punktfolgen	33
§ 5. Stetige Abbildungen	40
§ 6. Kurven und Gebiete in der Ebene	46
§ 7. Stetige Funktionen einer komplexen Veränderlichen	53
§ 8. Differentiation komplexer Funktionen	59
§ 9. Kurvenintegrale.	69
§ 10. Folgen von Funktionen	84
§ 11. Unendliche Reihen	91
§ 12. Vertauschung von Grenzprozessen	102

Zweites Kapitel

Die Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen

§ 1. Der Begriff der Holomorphie.	112
§ 2. Der Cauchysche Integralsatz	114
§ 3. Der Satz von RIEMANN. Die Cauchyschen Integralformeln	120
§ 4. Unendliche Reihen holomorpher Funktionen	129
§ 5. Ergänzung reeller Funktionen zu holomorphen Funktionen	142
§ 6. Ganze Funktionen	153
§ 7. Normale Familien holomorpher Funktionen	157
Anhang. Harmonische Funktionen.	167

Drittes Kapitel

Die analytischen Funktionen, ihre singulären Stellen und ihre Entwicklungen

§ 1. Analytische Fortsetzung	177
§ 2. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip	186
§ 3. Singuläre Punkte. Die Laurentsche Entwicklung. Meromorphe Funktionen	189
§ 4. Das Residuum	204
§ 5. Anwendungen des Residuenkalküls	209
§ 6. Normale Familien meromorpher Funktionen	230
§ 7. Partialbruchentwicklung meromorpher Funktionen	235
§ 8. Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen. Holomorphie- und Meromorphiegebiete	248
§ 9. Die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen und der Mittag Lefflersche Anschmiegunssatz	256

§ 10. Entwicklungen nach Polynomen und rationalen Funktionen	258
§ 11. Fourierentwicklungen	264
§ 12. Entwicklungen nach Orthogonalfunktionen	270
§ 13. Quadratintegrierbare Funktionen als Hilbertscher Raum	293
§ 14. Asymptotische Entwicklungen	297

Viertes Kapitel

Konforme Abbildungen

§ 1. Die Umkehrfunktionen.	310
§ 2. Analytische Funktionen und konforme Abbildung	317
§ 3. Die linearen Transformationen	324
§ 4. Transformationsgruppen	331
§ 5. Das Schwarzsche Lemma und die invarianten Metriken der linearen Transformationsgruppen	337
§ 6. Innere Abbildungen mit Fixpunkten	345
§ 7. Der Riemannsche Abbildungssatz	351
§ 8. Das Verhalten der Abbildungsfunktionen am Rande	357
§ 9. Spiegelungen und analytische Fortsetzung	372
§ 10. Die Familie der schlichten Funktionen. Verzerrungssätze.	387

Fünftes Kapitel

Der Gesamtverlauf der analytischen Funktionen und ihre Riemannschen Flächen

§ 1. Beispiele mehrblättriger Riemannscher Flächen	399
§ 2. Allgemeine Einführung der Riemannschen Fläche	407
§ 3. Analysis auf konkreten Riemannschen Flächen.	428
§ 4. Die algebraischen Funktionen	437
§ 5. Uniformisierungstheorie. Die universeile Überlagerungsfläche.	458
§ 6. Uniformisierungstheorie. Die Typen der Überlagerungsflächen	475
§ 7. Schleifenintegrale und transzendente Funktionen	492
Anhang. Zur Topologie der algebraischen Riemannschen Flächen	499

Sechstes Kapitel

Funktionen auf Riemannschen Flächen

§ 1. Eigentlich diskontinuierliche Gruppen linearer Transformationen	512
§ 2. Die Konstruktion automorpher Funktionen. Poincarésche Thetareihen. Elliptische Funktionen	529
§ 3. Differentiale, Integrale und Divisoren auf Riemannschen Flächen.	540
§ 4. Der Satz von RIEMANN-ROCH. Abelsche Differentiale	554
§ 5. Integrale und Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen	563
§ 6. Funktionen auf nicht kompakten Riemannschen Flächen	581
Namen- und Sachverzeichnis	593

THEORIE DER ANALYTISCHEN
FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN
VERÄNDERLICHEN