

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL · E. HOPF · H. HOPF · F. RELICH  
F. K. SCHMIDT · B. L. VAN DER WAERDEN

BAND LXVI

THEORIE DER GEWÖHNLICHEN  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

AUF FUNKTIONENTHEORETISCHER GRUNDLAGE  
DARGESTELLT

VON

LUDWIG BIEBERBACH



SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

1953

# THEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

AUF FUNKTIONENTHEORETISCHER GRUNDLAGE  
DARGESTELLT

VON

LUDWIG BIEBERBACH



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

ISBN 978-3-662-01217-8      ISBN 978-3-662-01216-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-01216-1

ALLE RECHTE,  
INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN,  
VORBEHALTEN

OHNE AUSDRÜCKLICHE GENEHMIGUNG DES VERLAGES  
IST ES AUCH NICHT GESTATTET, DIESES BUCH ODER TEILE DARAUS  
AUF PHOTOMECHANISCHEM WEGE (PHOTOKOPIE, MIKROKOPIE) ZU VERVIELFÄLTIGEN

COPYRIGHT 1953  
BY SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1953

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag OHG, in Berlin, Göttingen and Heidelberg 1953.

## Vorwort.

Seit SCHLESINGERS Büchern ist dreißig Jahre lang im deutschen Sprachbereich kein der Funktionentheorie der Differentialgleichungen gewidmetes Buch mehr erschienen, wenn auch viele Lehrbücher, wie z. B. das von HORN sowie das in dieser Sammlung erschienene Buch des Verfassers einzelnes aus diesem Gebiet bringen. INCE widmet fast die Hälfte seines rühmlichen Werkes der funktionentheoretischen Seite der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es sind aber auch schon wieder dreizehn Jahre seit dem Erscheinen dieses Buches vergangen. In jenen Jahrzehnten haben neue funktionentheoretische Methoden ihren Einzug gehalten und haben sich neue Fragestellungen, neue Ergebnisse und Verlagerungen des Schwerpunktes der Interessen gezeigt. Dies alles ist neben der steigenden Bedeutung, die der Gegenstand auch für die Anwendungsgebiete hat, Rechtfertigung genug für das Erscheinen eines neuen Buches, das die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage behandelt.

Ich kann nur eine Auswahl des reichen Stoffes bieten, nicht nur weil ein Lehrbuch kein Handbuch sein soll, und nicht nur weil meine Fähigkeiten wie die eines jeden Verfassers begrenzte sind, sondern vor allem deshalb, weil das in diesem Gebiet erstrebte eine nur allzu echte Obermenge des wirklich gesicherten ist. Zudem wird jeder, der über den Gegenstand dieses Buches weiterarbeiten will, zu den trefflichen Encyklopädieartikeln von EMIL HILB greifen müssen.

Meine Darstellung setzt voraus, daß die Elemente der Funktionentheorie zum gesicherten Wissensbestand des Benutzers gehören. Vorkenntnisse aus dem Gebiet der Differentialgleichungen werden nicht vorausgesetzt. Daher enthält das Buch die Partien, die vor allem den Anfänger angehen in breiter Darstellung und bietet Teile, die erst den Fortgeschrittenen ansprechen, in wesentlich knapperer Diktion. So wird dem Leser empfohlen, Abschnitte, die ihm Schwierigkeiten bereiten, zunächst zu überschlagen.

Mit Literaturangaben war ich sparsam. Ich habe nur erwähnt, was in der Encyklopädie noch nicht berücksichtigt werden konnte und habe darüber hinaus solche Literaturstellen namhaft gemacht, an die sich meine Darstellung anlehnt. Es versteht sich, daß in dem Buch auch geistiges Eigentum des Verfassers steckt. Dieses zu registrieren kann füglich den Referatenorganen überlassen bleiben.

Bei den Korrekturen haben mich die Herren GERHARD LYRA, WALTER NOLL, FRIEDEMANN STALLMANN, EGON ULLRICH, HANS WITTICH in trefflicher Weise unterstützt. Ihnen gilt mein herzlicher Dank. Unterhaltungen mit Herrn ISTVÁN SZABÓ waren mir während der Abfassung des Buches von anspornender und belehrender Bedeutung.

Berlin im Mai 1953.

BIEBERBACH.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>§ 1. Die grundlegenden Existenzsätze</b> . . . . .	1
1. Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	1
2. Calcul des limites. Majorantenmethode . . . . .	6
3. Analytische Fortsetzung . . . . .	8
4. Ein Satz von PAINLEVÉ . . . . .	10
5. Analytische Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen und von Parametern . . . . .	12
6. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	16
7. Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	19
<b>§ 2. Singuläre Stellen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung</b> . . . . .	21
1. Der Begriff der singulären Stelle der Differentialgleichung. . . . .	21
2. Der Satz von PAINLEVÉ für uneigentliche Stellen . . . . .	24
3. Wesentlich singuläre Stellen . . . . .	25
4. Pole von $f(w, z)$ . . . . .	30
5. Außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art der Differentialgleichung . . . . .	32
<b>§ 3. Das Verhalten der Lösungen von <math>dw/dz = (aw + bz)/(cw + dz)</math> für konstante <math>a, b, c, d</math> im Punkte <math>(0, 0)</math>.</b> . . . . .	34
1. Zwei Beispiele. . . . .	34
2. Transformation der Differentialgleichungen auf Normalformen . . . . .	35
3. Klasseneinteilung der Differentialgleichungen (3.2.3). . . . .	43
<b>§ 4. Außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art</b> . . . . .	46
1. Ansatz zur Klasseneinteilung . . . . .	46
2. Integration der partiellen Differentialgleichungen (4.1.19) . . . . .	49
3. Integration und Klasseneinteilung der Differentialgleichungen (4.1.1) . . . . .	52
4. Über die Ausnahmewerte $\lambda_1/\lambda_2 = n$ und $\lambda_1/\lambda_2 = 1/n$ . . . . .	54
5. Negativ reelle Werte $\lambda_1/\lambda_2$ . . . . .	58
6. Der Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ . . . . .	61
7. Verschwindende Determinante der Linearglieder . . . . .	63
8. Die BRIOT-BOUQUETSchen Differentialgleichungen (4.7.16) und (4.7.19) . . . . .	68
9. Algebraische Singularitäten der Differentialgleichung . . . . .	72
10. Singuläre Integrale . . . . .	74
11. Verallgemeinerung für Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	77
<b>§ 5. Differentialgleichungen erster Ordnung im Großen.</b> . . . . .	81
1. Feste und bewegliche Singularitäten. . . . .	81
2. Die RICCATISCHE Differentialgleichung . . . . .	84
3. Ein Satz vom MALMQUIST . . . . .	88
4. Ein Analogon des kleinen PICARDSchen Satzes . . . . .	102
5. Algebraische Differentialgleichungen . . . . .	102
6. Ein Satz von RELICH. . . . .	106

	Seite
<b>§ 6. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Kleinen . . . . .</b>	<b>108</b>
1. Das allgemeine Integral . . . . .	108
2. Beispiele . . . . .	110
3. Verlauf der Lösungen in der Nähe einer isolierten singulären Stelle . . . . .	115
4. Ein Kriterium für außerwesentlich singuläre Stellen . . . . .	120
5. Berechnung des kanonischen Fundamentalsystems in der Umgebung einer außerwesentlich singulären Stelle. . . . .	124
6. Berechnung des kanonischen Fundamentalsystems in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle . . . . .	130
7. Verallgemeinerungen . . . . .	132
8. Integrale, die sich an wesentlich singulären Stellen bestimmt verhalten . . . . .	161
9. THOMÉ'S Normalreihen . . . . .	174
10. Äquivalente singuläre Punkte . . . . .	181
<b>§ 7. Differentialgleichungen der FUCHSSchen Klasse . . . . .</b>	<b>182</b>
1. Begriffbestimmung . . . . .	182
2. Die determinierenden Gleichungen . . . . .	183
3. Differentialgleichungen mit ein oder zwei singulären Stellen . . . . .	184
4. Differentialgleichungen mit drei singulären Punkten . . . . .	184
5. Differentialgleichungen mit vier singulären Punkten . . . . .	187
<b>§ 8. Die hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .</b>	<b>189</b>
1. Die hypergeometrische Reihe . . . . .	189
2. Logarithmenfreies kanonisches Fundamentalsystem bei $z = 0$ . . . . .	192
3. Logarithmenhaltiges kanonisches Fundamentalsystem bei $z = 0$ . . . . .	196
4. Kanonische Fundamentalsysteme für $z = 1$ und $z = \infty$ . . . . .	199
5. Funktionalgleichungen für die hypergeometrische Funktion . . . . .	200
6. Analytische Fortsetzung von $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ . . . . .	204
7. Beweise zur analytischen Fortsetzung . . . . .	207
8. Analytische Fortsetzung der übrigen Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung . . . . .	213
9. Analytische Fortsetzung in den Ausnahmefällen . . . . .	219
10. Die Monodromiegruppe. . . . .	226
11. RIEMANN'S Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion . . . . .	231
12. Die SCHWARZsche Differentialgleichung . . . . .	232
13. Konforme Abbildung . . . . .	234
14. Algebraische Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten. . . . .	236
15. Das RIEMANN'Sche Problem. . . . .	245
<b>§ 9. Die BESSELSche Differentialgleichung . . . . .</b>	<b>257</b>
1. Fundamentalsystem bei $z = 0$ . . . . .	257
2. Die BESSELSche Differentialgleichung als Grenzfall der RIEMANN'Schen. . . . .	259
3. Asymptotisches Verhalten der Funktion $J_n(z)$ für $z \rightarrow \infty$ . . . . .	260
4. Zusammenhang mit THOMÉ'S Normalreihen . . . . .	270
5. Elementare Integrale der BESSELSchen Differentialgleichung . . . . .	272
<b>§ 10. Differentialgleichungen der FUCHSSchen Klasse mit vier singulären Punkten . . . . .</b>	<b>289</b>
1. Uniformisierung . . . . .	289
2. Ein Satz von PLEMELJ . . . . .	293

	Seite
3. Randwertaufgaben . . . . .	297
4. Obertheoreme . . . . .	299
5. Die LAMÉsche Differentialgleichung . . . . .	301
<b>§ 11. Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten . . . . .</b>	<b>302</b>
1. Periodische Lösungen . . . . .	302
2. Das allgemeine Integral . . . . .	307
3. Stabilität und Instabilität . . . . .	310
4. Doppelperiodische Koeffizienten . . . . .	317
<b>§ 12. Einiges über nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .</b>	<b>324</b>
1. Die PAINLEVÉschen Transzendenten . . . . .	324
2. HÖLDERS Satz über die Gammafunktion . . . . .	325
3. Ein Satz von HURWITZ . . . . .	328
4. Untersuchungen von WITTICH . . . . .	333
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	335