

# Springer-Lehrbuch





## **Grundwissen Mathematik**

Ebbinghaus et al.: Zahlen

Hämmerlin/Hoffmann: Numerische Mathematik

Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie

Remmert: Funktionentheorie 1

Remmert: Funktionentheorie 2

Walter: Analysis 1

Walter: Analysis 2

*Herausgeber* der Grundwissen-Bände im Springer-Lehrbuch-  
Programm sind: G. Hämmerlin, F. Hirzebruch, H. Kraft,  
K. Lamotke, R. Remmert, W. Walter

Max Koecher

# Lineare Algebra und analytische Geometrie

Dritte, unveränderte Auflage  
Mit 35 Abbildungen

**Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH**

Max Koecher †

Mathematics Subject Classification (1991): 15-XX

---

Dieser Band erschien bisher als Band 2 der Reihe *Grundwissen Mathematik*

---

ISBN 978-3-540-55653-4      ISBN 978-3-662-00660-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-00660-3

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Koecher Max:

Lineare Algebra und analytische Geometrie / Max Koecher. – 3., unveränd. Aufl. –

Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest:

Springer, 1992

(Springer-Lehrbuch) (Grundwissen Mathematik)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983, 1985, 1992

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1992

Satz: Buchdruckerei Dipl.-Ing. Schwarz'Erben KG, Zwettl  
44/3140–543210 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

# Vorwort

Dieses Buch wendet sich an alle, die durch Neigung oder Pflicht mit der Mathematik verbunden sind: Es soll

- Studierende der Mathematik in Haupt- und Nebenfach,
- Lehrer für Mathematik oder Physik an weiterführenden Schulen,
- ausgebildete Mathematiker und cum grano salis,
- interessierte Laien

ansprechen. Aus ihm kann man als Anfänger die Grundzüge der linearen Algebra und der analytischen Geometrie lernen. Es eignet sich dann gleichermaßen zur Weiterbildung, zur Vorbereitung auf Prüfungen im Hochschulbereich und als bescheidenes Nachschlagewerk für grundlegende algebraische und geometrische Begriffe. Selbst manche Begriffe und Ergebnisse der Analysis findet man in die lineare Algebra eingeordnet. Das Kapitel 4 (Elementar-Geometrie) und Teile der Kapitel 1, 2 und 7 sind darüber hinaus für Aufbau- und Leistungskurse in weiterführenden Schulen sowie für Proseminare gut geeignet.

Aber auch der ausgebildete Mathematiker wird hin und wieder neue Gesichtspunkte der linearen Algebra oder analytischen Geometrie entdecken und historische Bezüge kennenlernen. Das ausführliche Inhaltsverzeichnis gibt eine gute Übersicht über den behandelten Stoff.

Vom Inhalt her unterscheidet sich das vorliegende Buch von den meisten Büchern zur linearen Algebra:

- Der algebraische Teil ist nicht Selbstzweck, sondern versucht die Aspekte der linearen Algebra hervorzuheben, die auch für andere Teilgebiete der Mathematik wesentlich sind.
- Von Anfang an wird auf wichtige Beispiele aus der Analysis besonderer Wert gelegt.
- Der Matrizen- und Determinantenkalkül wird in teilweise neuer Form dargestellt.
- Die analytische Geometrie in der Ebene und im Anschauungsraum hat neben den euklidischen Vektorräumen ihren Platz. Die sphärische Geometrie kann als Anwendung des Vektorproduktes kurz dargestellt werden.
- In Beispielen und Anmerkungen wird auf Anwendung der linearen Algebra und auf weiterführende Theorien hingewiesen.

Nicht zuletzt werden häufig

- historische Bezüge

aufgezeigt: Dabei geht es nicht nur um Angabe von Lebensdaten berühmter Mathematiker. Die Einführung des abstrakten Vektorraum-Begriffs durch H. GRASSMANN im Jahre 1844 oder die Erfindung der Matrizenrechnung durch A. CAYLEY im Jahre 1858 wird z. B. ausführlich dargestellt und mit Zitaten belegt. Zu den historischen Bemerkungen muß allerdings gesagt werden, daß die Zitate zwar immer belegt sind, daß die Quellen dafür aber oft der Sekundärliteratur entnommen sind.

Die beabsichtigte Beschränkung dieses Buches auf knapp 300 Druckseiten erforderte, daß nicht nur unwichtige Teile des in Frage kommenden Stoffes weggelassen werden mußten: So konnte z. B. die projektive Geometrie und die multilineare Algebra nicht aufgenommen werden. Trotzdem glaube ich, daß das *Grundwissen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie*, welches in einer zweisemestrigen Vorlesung behandelt werden sollte, durch das vorliegende Buch bereitgestellt wird.

Auf die im Kleindruck gesetzten Absätze wird an späterer Stelle kein Bezug genommen. Die mit einem Stern gekennzeichneten Abschnitte können und sollen bei der ersten Lektüre (z. B. als Studienanfänger) übergangen werden. Diese Stellen geben dem fortgeschrittenen Leser unter anderem zusätzliche Hinweise auf Zusammenhänge zu anderen mathematischen Theorien.

Ein Zitat 3.4.2 bedeutet Abschnitt 2 im Paragraphen 4 des Kapitels 3. Innerhalb eines Kapitels wird die Kapitelnummer, innerhalb eines Paragraphen die Paragraphennummer weggelassen, entsprechend wird innerhalb eines Abschnittes verfahren.

Bei der Abfassung des Manuskriptes wurde ich von Mitarbeitern und Kollegen tatkräftig unterstützt: Den Herren Dr. J. HEINZE, J. MEYER-LERCH, Dr. E. NEHER danke ich für eine kritische Durchsicht von Teilen des Manuskriptes. Herr H. PETERSSON und besonders die Herren R. REMMERT und K. LAMOTKE haben den vollständigen Text kritisch gelesen und oft nützliche Vorschläge gemacht. Ihnen gilt mein besonderer Dank. Herrn A. KRIEG danke ich für die Mitarbeit bei den Korrekturen und dem Verlag für sein besonderes Entgegenkommen. Schließlich danke ich meiner Tochter Martina für die Anfertigung der Federzeichnungen.

Die vorliegende 2. Auflage wurde durch weitere Aufgaben und durch den Abschnitt 8.7.5 ergänzt. Dank gilt allen Kollegen, deren Hinweise es erlaubten, die Zahl der Druckfehler zu vermindern.

# Inhaltsverzeichnis

## Teil A. Lineare Algebra I

<i>Kapitel 1. Vektorräume</i> . . . . .	1
§ 1. Der Begriff eines Vektorraumes . . . . .	1
1. Vorbemerkung 2. Vektorräume 3. Unterräume 4. Geraden 5. Das Standardbeispiel $K^n$ 6. Geometrische Deutung 7. Anfänge einer Geometrie im $\mathbb{R}^2$	
§ 2*. Über den Ursprung der Vektorräume. . . . .	10
1. Die GRASSMANNsche Ausdehnungslehre 2. GRASSMANN: Übersicht über die allgemeine Formenlehre 3. Extensive Größen als Elemente eines Vektorraumes 4. Reaktion der Mathematiker 5. Der moderne Vektorraumbegriff	
§ 3. Beispiele von Vektorräumen . . . . .	15
1. Einleitung 2. Reelle Folgen 3. Vektorräume von Abbildungen 4. Stetige Funktionen 5. Reelle Polynome 6*. Reell-analytische Funktionen 7*. Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung 8. Die Vektorräume $\text{Abb}[M, K]$	
§ 4. Elementare Theorie der Vektorräume . . . . .	20
1. Vorbemerkung 2. Homogene Gleichungen 3. Erzeugung von Unterräumen 4. Lineare Abhängigkeit 5. Der Begriff einer Basis 6. Die Dimension eines Vektorraums 7. Der Dimensions-Satz 8*. Der Basis-Satz für beliebige Vektorräume 9*. Ein Glasperlen-Spiel	
§ 5. Anwendungen . . . . .	30
1. Die reellen Zahlen als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ 2. Beispiele 3. Der Rang einer Teilmenge 4. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	
§ 6. Homomorphismen von Vektorräumen . . . . .	35
1. Einleitung 2. Definition und einfachste Eigenschaften 3. Kern und Bild 4. Die Dimensionsformel für Homomorphismen 5. Äquivalenz-Satz für Homomorphismen 6. Der Rang eines Homomorphismus 7. Anwendung auf homogene lineare Gleichungen 8. Beispiele 9*. Die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$	
§ 7*. Linearformen und der duale Raum . . . . .	45
1. Vorbemerkungen 2. Definition und Beispiele 3. Existenz von Linearformen 4. Der Dual-Raum 5. Linearformen des Vektorraums der stetigen Funktionen	
§ 8*. Direkte Summen und Komplemente . . . . .	48
1. Summe und direkte Summe 2. Komplemente 3. Die Dimensionsformel für Summen 4. Die Bild-Kern-Zerlegung	

<i>Kapitel 2. Matrizen</i> . . . . .	52
§ 1. Erste Eigenschaften . . . . .	52
1. Der Begriff einer Matrix 2. Über den Vorteil von Doppelindizes 3. $\text{Mat}(m, n; K)$ als $K$ -Vektorraum 4. Das Transponierte einer Matrix 5. Spalten- und Zeilenrang 6. Elementare Umformungen 7. Die Ranggleichung 8. Kästchenschreibweise und Rangberechnung 9. Zur Geschichte des Rang-Begriffes	
§ 2. Matrizenrechnung. . . . .	62
1. Arthur CAYLEY oder die Erfindung der Matrizenrechnung 2. Produkte von Matrizen 3. Produkte von Vektoren 4. Homomorphismen zwischen Standard-Räumen 5. Erntezeit 6. Das Skalarprodukt 7*. Rang $A \leq r$ 8. Kästchenrechnung	
§ 3. Algebren. . . . .	70
1. Einleitung 2. Der Begriff einer Algebra 3. Invertierbare Elemente 4. Ringe 5. Beispiele	
§ 4. Der Begriff einer Gruppe. . . . .	73
1. Halbgruppen 2. Gruppen 3. Untergruppen 4. Kommutative Gruppen 5. Homomorphismen 6. Normalteiler 7. Historische Bemerkungen	
§ 5. Matrix-Algebren . . . . .	79
1. $\text{Mat}(n; K)$ und $GL(n; K)$ 2. Der Äquivalenz-Satz für invertierbare Matrizen 3. Die Invarianz des Ranges 4. Spezielle invertierbare Matrizen 5*. Zentralisator und Zentrum 6. Die Spur einer Matrix 7. Die Algebra $\text{Mat}(2; K)$	
§ 6. Der Normalformen-Satz . . . . .	86
1. Elementar-Matrizen 2. Zusammenhang mit elementaren Umformungen 3. Anwendungen 4*. Die WEYR-FROBENIUS-Ungleichungen 5. Aufgaben zum Normalformen-Satz 6. Zur Geschichte des Normalformen-Satzes	
§ 7. Gleichungssysteme . . . . .	89
1. Erinnerung an lineare Gleichungen 2. Wiederholung von Problemen und Ergebnissen 3. Der Fall $m = n$ 4. Anwendung des Normalformen-Satzes 5. Lösungsverfahren 6. Basiswechsel in Vektorräumen	
§ 8*. Pseudo-Inverse . . . . .	94
1. Motivation 2. Der Begriff des Pseudo-Inversen 3. Ein Kriterium für Gleichungssysteme 4. Zerlegung in eine direkte Summe	
<i>Kapitel 3. Determinanten</i> . . . . .	98
§ 1. Erste Ergebnisse über Determinanten . . . . .	98
1. Eine Motivation 2. Determinanten-Funktionen 3. Existenz 4. Eigenschaften 5. Anwendungen auf die Gruppe $GL(n; K)$ 6. Die CRAMERSche Regel	
§ 2. Das Inverse einer Matrix. . . . .	106
1. Vorbemerkung 2. Die Entwicklungssätze 3. Die komplementäre Matrix 4. Beschreibung des Inversen	
§ 3. Existenzbeweise . . . . .	109
1. Durch Induktion 2. Permutationen 3. Die LEIBNIZSche Formel 4. Permutati- onsmatrizen 5. Ein weiterer Existenzbeweis	
§ 4. Erste Anwendungen . . . . .	112
1. Lineare Gleichungssysteme 2. Zweidimensionale Geometrie 3. Lineare Abhängigkeit 4. Rangberechnung 5. Die Determinanten-Rekursionsformel 6. Das charakteristische Polynom 7*. Mehrfache Nullstellen von Polynomen 8*. Eine Funktionalgleichung 9. Orientierung von Vektorräumen	



§ 5. Symmetrische Matrizen. . . . . 121  
 1. Einleitung 2. Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen 3. Quadratische Ergänzung 4. Die JACOBISCHE Normalform 5. Normalformen-Satz 6\*. Trägheits-Satz

§ 6. Spezielle Matrizen . . . . . 126  
 1. Schiefsymmetrische Matrizen 2. Die VANDERMONDESCHESCHE Determinante 3. Bandmatrizen 4. Aufgaben

§ 7. Zur Geschichte der Determinanten . . . . . 128  
 1. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ 2. BALTZER'S Lehrbuch 3. Die weitere Entwicklung

**Teil B. Analytische Geometrie**

*Kapitel 4. Elementar-Geometrie in der Ebene* . . . . . 130

Der pythagoreische Lehrsatz . . . . . 130

§ 1. Grundlagen . . . . . 131  
 1. Skalarprodukt, Abstand und Winkel 2. Die Abbildung  $x \mapsto x^\perp$  3. Geraden 4. Schnittpunkt zwischen zwei Geraden 5. Abstand zwischen Punkt und Gerade 6. Fläche eines Dreiecks 7. Der Höhenschnittpunkt

§ 2. Die Gruppe  $O(2)$  . . . . . 137  
 1. Drehungen und Spiegelungen 2. Orthogonale Matrizen 3. Bewegungen 4. Ein Beispiel 5. Die Hauptachsentransformation für  $2 \times 2$  Matrizen 6. Fix-Geraden 7. Die beiden Orientierungen der Ebene

§ 3. Geometrische Sätze . . . . . 141  
 1. Der Kreis 2. Tangente 3. Die beiden Sehnensätze 4. Der Umkreis eines Dreiecks 5. Die EULER-Gerade 6. Der FEUERBACH-Kreis 7. Das Mittendreieck

*Kapitel 5. Euklidische Vektorräume* . . . . . 148

§ 1. Positiv definite Bilinearformen. . . . . 149  
 1. Symmetrische Bilinearformen 2. Beispiele 3. Positiv definite Bilinearformen 4. Positiv definite Matrizen 5. Die CAUCHY-SCHWARZSCHE Ungleichung 6. Normierte Vektorräume

§ 2. Das Skalarprodukt . . . . . 155  
 1. Der Begriff eines euklidischen Vektorraumes 2. Winkelmessung 3. Orthonormalbasen 4. Basisdarstellung 5. Orthogonales Komplement und orthogonale Summe 6. Linearformen

§ 3. Erste Anwendungen . . . . . 162  
 1. Positiv definite Matrizen 2. Die adjungierte Abbildung 3. Systeme linearer Gleichungen 4. Ein Kriterium für gleiche Orientierung 5\*. LEGENDRE-Polynome

§ 4. Geometrie in euklidischen Vektorräumen. . . . . 165  
 1. Geraden 2. Hyperebenen 3. Schnittpunkt von Gerade und Hyperebene 4. Abstand von einer Hyperebene 5\*. Orthogonale Projektion 6\*. Abstand zweier Unterräume 7\*. Volumenberechnung 8\*. Duale Basen

§ 5. Die orthogonale Gruppe . . . . . 172  
 1. Bewegungen 2. Spiegelungen 3. Die Transitivität von  $O(V, \sigma)$  auf Sphären 4\*. Die Erzeugung von  $O(V, \sigma)$  durch Spiegelungen 5\*. Winkeltreue Abbildungen

§ 6. Vermischte Aufgaben. . . . . 177

X Inhaltsverzeichnis

*Kapitel 6. Der  $\mathbb{R}^n$  als Euklidischer Vektorraum* . . . . . 179

§ 1. Der  $\mathbb{R}^n$  und die orthogonale Gruppe  $O(n)$  . . . . . 179

1. Der euklidische Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  2. Orthogonale Matrizen 3. Die Gruppe  $O(n)$  4. Spiegelungen 5. Erzeugung von  $O(n)$  durch Spiegelungen 6\*. Drehungen 7. Anwendung der Determinanten-Theorie 8\*. Eine Parameterdarstellung 9. EULER, CAUCHY, JACOBI und CAYLEY

§ 2. Die Hauptachsentransformation . . . . . 187

1. Problemstellung 2. Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen 3. Positiv semi-definite Matrizen 4. Das Minimum einer quadratischen Form 5. Satz über die Hauptachsentransformation 6. Eigenwerte 7. Eigenräume

§ 3. Anwendungen . . . . . 195

1. Vorbemerkung 2. Positiv definite Matrizen 3. Hyperflächen 2. Grades 4\*. Der Quadratwurzel-Satz 5\*. Polar-Zerlegung 6\*. Orthogonale Normalform 7\*. Das MOORE-PENROSE-INVERSE

§ 4\*. Topologische Eigenschaften . . . . . 201

1. Zusammenhang 2. Kompaktheit 3. Hauptachsentransformation

*Kapitel 7. Geometrie im dreidimensionalen Raum* . . . . . 204

§ 1. Das Vektorprodukt . . . . . 204

1. Definition und erste Eigenschaften 2. Zusammenhang mit Determinanten 3. Geometrische Deutung 4. Ebenen 5. Parallelotope 6. Vektorrechnung im Anschauungsraum

§ 2\*. Sphärische Geometrie . . . . . 210

1. Über den Ursprung der Sphärik 2. Das sphärische Dreieck 3. Das Polardreieck 4. Entfernung auf der Erde

§ 3. Die Gruppe  $O(3)$  . . . . . 214

1. Beschreibung durch das Vektorprodukt 2. Erzeugung durch Drehungen 3. Spiegelungen 4. Fix-Geraden 5. Die Normalform 6. Die Drehachse 7\*. Die EULERSche Formel 8\*. Drehungen um eine Achse

§ 4. Bewegungen . . . . . 222

1. Fixpunkte 2. Bewegungen mit Fixpunkt 3. Schraubungen

**Teil C. Lineare Algebra II**

*Kapitel 8. Polynome und Matrizen* . . . . . 225

§ 1. Polynome . . . . . 225

1. Der Vektorraum  $\text{Pol } K$  2.  $\text{Pol } K$  als Ring 3. Zerfallende Polynome 4.  $\text{Pol } K$  als Hauptidealring 5\*. Unbestimmte

§ 2. Die komplexen Zahlen . . . . . 230

1. Der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen 2. Konjugation und Betrag 3. Der Fundamentalsatz der Algebra

§ 3. Struktursatz für zerfallende Matrizen . . . . . 232

1. Der Begriff der Diagonalisierbarkeit 2. Das charakteristische Polynom 3. Äquivalenz-Satz für Eigenwerte 4. Nilpotente Matrizen 5. Idempotente Matrizen 6. Zerfallende Matrizen 7. Diagonalisierbarkeits-Kriterium 8\*. Ein Beispiel zum Struktur-Satz 9\*. Elementarsymmetrische Funktionen und Potenzsummen

§ 4. Die Algebra $K[A]$ . . . . .	242
1. Eine Warnung 2. Matrix-Polynome 3. Das Minimalpolynom 4. Eigenwerte 5. Das Rechnen mit Kästchen-Diagonalmatrizen 6. Satz von CAYLEY 7. Äqui- valenz-Satz für Diagonalisierbarkeit 8. Spektralscharen 9. Eigenräume	
§ 5. Die JORDAN-CHEVALLEY-Zerlegung. . . . .	251
1. Existenz-Satz 2. Summen von diagonalisierbaren Matrizen 3. Die Ein- deutigkeit 4. Anwendungen	
§ 6. Normalformen reeller und komplexer Matrizen . . . . .	254
1. Normalformen komplexer Matrizen 2. Reelle und komplexe Matrizen 3*. Hermitesche Matrizen 4. Invariante Unterräume 5. Die Stufenform 6. Der Satz über die Stufenform 7. Orthogonale Matrizen 8. Schiefsymmetrische Matrizen 9*. Normale Matrizen	
§ 7*. Der höhere Standpunkt . . . . .	261
1. Einfache und halbeinfache Algebren 2. Kommutative Algebren 3. Die Struktursätze 4. Die weitere Entwicklung 5. Der generische Standpunkt	
<i>Kapitel 9. Homomorphismen von Vektorräumen. . . . .</i>	
§ 1. Der Vektorraum $\text{Hom}(V, V')$ . . . . .	264
1. Der Vektorraum $\text{Abb}(M, V')$ 2. $\text{Hom}(V, V')$ als Unterraum von $\text{Abb}(V, V')$ 3. $\text{Mat}(m, n; K)$ als Beispiel 4. Verknüpfungen von $\text{Hom}(V, V')$ und $\text{Hom}(V', V'')$	
§ 2. Beschreibung der Homomorphismen im endlich-dimensionalen Fall .	266
1. Isomorphie mit Standard-Räumen 2. Darstellung der Homomorphismen 3. Basiswechsel 4. Die Algebra $\text{End } V$ 5. Diagonalisierbarkeit	
§ 3. Anwendungen . . . . .	269
1. Spiegelungen in euklidischen Vektorräumen 2. Die Linksmultiplikation in $\text{Mat}(n; K)$ 3. Polynome	
§ 4. Der Quotientenraum . . . . .	271
1. Einleitung 2. Nebenklassen 3. Der Satz über den Quotientenraum 4. Der Satz über den kanonischen Epimorphismus 5. Kanonische Faktorisierung 6. Anwendungen 7. Beispiele	
§ 5*. Nilpotente Endomorphismen . . . . .	274
1. Problemstellung 2. Zyklische Unterräume 3. Der Struktur-Satz 4. Nilzykli- sche Matrizen 5. Die Normalform	
<i>Literatur . . . . .</i>	
<i>Namenverzeichnis . . . . .</i>	
<i>Sachverzeichnis . . . . .</i>	