

VORLESUNGEN  
ÜBER DIFFERENTIAL- UND  
INTEGRALRECHNUNG

VON

R. COURANT

ERSTER BAND

FUNKTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN

Dritte, verbesserte Auflage

MIT 126 TEXTFIGUREN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1955

ISBN 978-3-662-00643-6      ISBN 978-3-662-00642-9 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-00642-9

ALLE RECHTE,  
INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN,  
VORBEHALTEN

OHNE AUSDRÜCKLICHE GENEHMIGUNG DES VERLAGES  
IST ES AUCH NICHT GESTATTET, DIESES BUCH ODER TEILE DARAUS  
AUF PHOTOMECHANISCHEM WEGE (PHOTOKOPIE, MIKROKOPIE)  
ZU VERVIELFÄLTIGEN

COPYRIGHT 1955 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Ursprünglich erschienen bei SPRINGER-VERLAG OHG. BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG 1955

Softcover reprint of the hardcover 3rd edition 1955

## Vorwort zur dritten Auflage.

Die ersten Auflagen von Band I des vorliegenden Lehrbuches erschienen 1927 und 1930. Ich wurde von Studenten und Kollegen gedrängt, meine Göttinger Vorlesungen herauszugeben. Zum ersten Male wurde in einem Lehrbuch Differentiation und Integration von vorneherein gemeinsam eingeführt, entgegen der seit EULER immer wieder kopierten getrennten Behandlung, welche für den Anfänger ganz unsachgemäß ist; weiterhin versuchten die Vorlesungen, ohne Verzicht auf Präzision, den Stoff in einer undogmatischen lesbaren Form darzustellen und abstrakte Begriffe anschaulich zu motivieren. Schließlich sollte der Zusammenhang der mathematischen Analysis mit der physikalischen Realität betont werden.

Der Erfolg des Buches, in mehreren Sprachen, hat gezeigt, daß das Bedürfnis nach einer solchen Darstellung nicht nachgelassen hat.

Ich freue mich daher, nunmehr eine wesentlich veränderte und, wie ich glaube, verbesserte, dritte Auflage vorlegen zu können, welche mit dem Erscheinen des zweiten Bandes bald vollständig sein wird. Das Buch wendet sich an zukünftige Lehrer und Forscher in der Mathematik, in der Physik und anderen Naturwissenschaften, und an Ingenieure. Ich hoffe, daß es den Lernenden den Zugang zur Wissenschaft erleichtern wird, ohne sie durch billige Kompromisse zu täuschen.

Herrn Dr. J. MOSER in Göttingen und Frau CHARLOTTE JOHN in New Rochelle bin ich zu Dank verpflichtet für ihre Hilfe bei der Neubearbeitung. Ganz besonders aber muß ich Herrn Dr. FERDINAND SPRINGER danken, mit dem mich ein jahrzehntelanges Verhältnis freundschaftlichen Vertrauens verbindet und dessen persönliches Interesse diese Neubearbeitung veranlaßt hat.

New Rochelle, N. Y., und Heidelberg, Sommer 1954.

R. COURANT.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorbemerkungen . . . . .	1
<p>Erstes Kapitel.</p> <p><b>Vorbereitungen.</b></p>	
§ 1. Das Zahlenkontinuum . . . . .	3
Das System der rationalen Zahlen und die Notwendigkeit seiner Erweiterung S. 3. — Das Kontinuum der reellen Zahlen und unendliche Dezimalbrüche S. 6. — Ungleichungen S. 8.	
§ 2. Der Funktionsbegriff . . . . .	9
Beispiele S. 9. — Begriffliche Formulierung S. 10. — Geometrische Darstellung. Stetigkeit. Monotone Funktionen S. 11. — Umkehrfunktionen S. 15.	
§ 3. Nähere Betrachtung der elementaren Funktionen . . . . .	16
Die rationalen Funktionen S. 16. — Algebraische Funktionen S. 18. — Die trigonometrischen Funktionen S. 19. — Exponentialfunktion und Logarithmus S. 20.	
§ 4. Funktionen einer ganzzahligen Veränderlichen — Zahlenfolgen — Vollständige Induktion . . . . .	21
Definition und Beispiele S. 21. — Das Prinzip der vollständigen Induktion S. 22. — Beispiel: Die Summe der ersten $n$ Quadrate S. 24.	
§ 5. Der Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge. Beispiele . . . . .	25
$a_n = \frac{1}{n}$ S. 25. — $a_{2m} = \frac{1}{m}$ ; $a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$ S. 26. — $a_n = \frac{n}{n+1}$ S. 27. — $a_n = \sqrt[n]{p}$ S. 27. — $a_n = \alpha^n$ S. 29. — Zur geometrischen Veranschaulichung der Grenzwerte von $\alpha^n$ und $\sqrt[n]{p}$ S. 30. — Die geometrische Reihe S. 31. — $a_n = \sqrt[n]{n}$ S. 32. — $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ S. 32. — $a_n = \frac{n}{a^n}$ S. 33.	
§ 6. Genauere Erörterung des Grenzwertbegriffes . . . . .	33
Definition der Konvergenz S. 33. — Zweite Definition der Konvergenz S. 35. — Monotone Folgen S. 36. — Rechnen mit Grenzwerten S. 37. — Die Zahl $e$ S. 38. — Beweis der Irrationalität von $e$ . S. 40. — Die Zahl $\pi$ als Grenzwert S. 40. — Das arithmetisch-geometrische Mittel S. 41. — Motivierung der präzisen Grenzwertdefinition S. 42.	
§ 7. Der Begriff des Grenzwertes bei stetigen Veränderlichen . . . . .	43
Definitionen und Beispiele S. 43. — Motivierung der Begriffsbildung S. 45.	
§ 8. Der Begriff der Stetigkeit . . . . .	47
Definitionen S. 47. — Unstetigkeitspunkte S. 48. — Sätze über stetige Funktionen S. 52.	

<b>Anhang I zum ersten Kapitel.</b>		Seite
Vorbemerkungen . . . . .		52
§ 1. Das Häufungsstellen-Prinzip und seine Anwendungen . . . . .		54
Das Häufungsstellen-Prinzip S. 54. — Intervallschachtelung und Zahlenkontinuum S. 55. — Grenzwerte von Zahlenfolgen S. 56. — Beweis des CAUCHYSchen Konvergenzkriteriums S. 58. — Oberer und unterer Häufungspunkt, obere und untere Grenze einer Zahlenmenge S. 59.		
§ 2. Sätze über stetige Funktionen . . . . .		60
Größter und kleinster Wert stetiger Funktionen S. 60. — Die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit S. 61. — Der Zwischenwertsatz S. 63. — Umkehrung einer stetigen monotonen Funktion S. 64. — Weitere Sätze über stetige Funktionen S. 65.		
§ 3. Bemerkungen über die elementaren Funktionen . . . . .		65

**Anhang II zum ersten Kapitel.**

§ 1. Polarkoordinaten . . . . .	67
§ 2. Bemerkungen über komplexe Zahlen . . . . .	68

Zweites Kapitel.

**Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung.**

§ 1. Das bestimmte Integral . . . . .	70
Das Integral als Flächeninhalt S. 71. — Die analytische Definition des Integrales S. 72. — Ergänzungen, Bezeichnungen und Grundregeln für das bestimmte Integral S. 74.	
§ 2. Beispiele . . . . .	76
Erstes Beispiel S. 76. — Zweites Beispiel S. 77. — Integration von $x^\alpha$ bei beliebigem positiven ganzzahligen $\alpha$ S. 78. — Integration von $x^\alpha$ für beliebiges rationales $\alpha \neq -1$ S. 79. — Integration von $\sin x$ und $\cos x$ S. 80.	
§ 3. Die Ableitung oder der Differentialquotient . . . . .	82
Differentialquotient und Kurventangente S. 82. — Der Differentialquotient als Geschwindigkeit S. 85. — Beispiele S. 86. — Einige Grundregeln für die Differentiation S. 89. — Differenzierbarkeit und Stetigkeit der Funktionen S. 89. — Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung S. 91. — Differentialquotienten und Differenzenquotienten; Bezeichnungen von LEIBNIZ S. 92. — Der Mittelwertsatz S. 94. — Angenäherte Darstellung beliebiger Funktionen durch lineare. — Differentiale S. 97. — Bemerkungen über die Anwendungen unserer Begriffe in der Naturwissenschaft S. 98.	
§ 4. Das unbestimmte Integral, die primitive Funktion und die Fundamentalsätze der Differential- und Integralrechnung . . . . .	99
Das Integral als Funktion der oberen Grenze S. 100. — Der Differentialquotient des unbestimmten Integrales S. 101. — Die primitive Funktion (Stammfunktion); allgemeine Definition des unbestimmten Integrales S. 103. — Die Verwendung der primitiven Funktion zur Ausführung bestimmter Integrale S. 106. — Einige Beispiele S. 107.	
§ 5. Einfachste Methoden zur graphischen Integration . . . . .	108

	Seite
§ 6. Weitere Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Integral und dem Differentialquotient . . . . .	110
Die Massenverteilung und Dichte; Gesamtquantität und spezifische Quantität S. 110. — Gesichtspunkte der Anwendungen S. 112.	
§ 7. Integralabschätzungen und Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . .	114
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung S. 114. — Anwendung: Integration und Differentiation von $x^\alpha$ S. 117.	

#### Anhang zum zweiten Kapitel.

§ 1. Die Existenz des bestimmten Integrales einer stetigen Funktion . . . .	118
§ 2. Zusammenhang des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	120

#### Drittes Kapitel.

### Differential- und Integralrechnung der elementaren Funktionen.

§ 1. Die einfachsten Differentiationsregeln und ihre Anwendungen . . . . .	122
Differentiationsregeln S. 122. — Differentiation der rationalen Funktionen S. 124. — Differentiation der trigonometrischen Funktionen S. 125.	
§ 2. Die entsprechenden Integralformeln . . . . .	126
Allgemeine Integrationsregeln S. 126. — Integration der einfachsten Funktionen S. 127.	
§ 3. Die Umkehrfunktion und ihr Differentialquotient . . . . .	128
Die allgemeine Differentiationsformel S. 128. — Die Umkehrfunktionen der Potenzen und der trigonometrischen Funktionen S. 130. — Die zugehörigen Integralformeln S. 134.	
§ 4. Die Differentiation der zusammengesetzten Funktionen . . . . .	135
Die Kettenregel S. 135. — Beispiele S. 137. — Nochmals Integration und Differentiation von $x^\alpha$ für irrationales $\alpha$ S. 138.	
§ 5. Maxima und Minima . . . . .	139
Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitungen (Konvexität) S. 140. — Maxima und Minima S. 141. — Beispiele für Maxima und Minima S. 144.	
§ 6. Logarithmus und Exponentialfunktion . . . . .	148
Definition des Logarithmus. Differentiationsformel S. 148. — Das Additionstheorem S. 150. — Monotoner Charakter und Wertevorrat des Logarithmus S. 151. — Die Umkehrfunktion des Logarithmus (Exponentialfunktion) S. 151. — Die allgemeine Exponentialfunktion $a^x$ und die allgemeine Potenz $x^\alpha$ S. 153. — Exponentialfunktion und Logarithmus dargestellt durch Grenzwerte S. 154. — Schlußbemerkungen S. 156.	
§ 7. Einige Anwendungen der Exponentialfunktion . . . . .	157
Charakterisierung der Exponentialfunktion durch eine Differentialgleichung S. 157. — Stetige Verzinsung. Radioaktiver Zerfall S. 158. — Abkühlung oder Erwärmung eines Körpers in einem umgebenden Medium S. 159. — Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe über dem Erdboden S. 160. — Verlauf chemischer Reaktionen S. 161. — Ein- und Ausschalten eines elektrischen Stromes S. 162.	
§ 8. Die Hyperbelfunktionen . . . . .	163
Analytische Definition S. 163. — Additionstheoreme und Differentiationsformeln S. 164. — Die Umkehrfunktionen S. 165. — Weitere Analogien S. 166.	

	Seite
§ 9. Die Größenordnung von Funktionen . . . . .	168
Begriff der Größenordnung. Einfachste Fälle S. 168. — Die Größenordnung der Exponentialfunktion und des Logarithmus S. 169. — Allgemeine Bemerkungen S. 171. — Die Größenordnung einer Funktion in der Umgebung eines beliebigen Punktes S. 171. — Größenordnung des Verschwindens einer Funktion S. 172.	

**Anhang zum dritten Kapitel.**

§ 1. Betrachtung einiger spezieller Funktionen . . . . .	173
Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ S. 173. — Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x}}$ S. 174. — Die Funktion $y = \Im g \frac{1}{x}$ S. 174. — Die Funktion $y = x \Im g \frac{1}{x}$ S. 175. — Die Funktion $y = x \sin \frac{1}{x}$ , $y(0) = 0$ S. 176.	
§ 2. Bemerkungen über die Differenzierbarkeit von Funktionen . . . . .	176
§ 3. Verschiedene Einzelheiten . . . . .	177
Beweis des binomischen Satzes S. 177. — Fortgesetzte Differentiation S. 178. — Weitere Beispiele für Anwendung der Kettenregel. Verallgemeinerter Mittelwertsatz S. 179.	

Viertes Kapitel.

**Weiterer Ausbau der Integralrechnung.**

§ 1. Zusammenstellung der elementaren Integrale . . . . .	181
§ 2. Die Substitutionsregel . . . . .	182
Die Substitutionsformel S. 182. — Neuer Beweis der Substitutionsformel S. 186. — Beispiele. Integrationsformeln S. 187.	
§ 3. Weitere Beispiele zur Substitutionsmethode . . . . .	188
§ 4. Die Produktintegration . . . . .	191
Allgemeines S. 191. — Beispiele S. 193. — Rekursionsformeln S. 194. — Die WALLISSCHE Produktzerlegung von $\pi$ S. 195.	
§ 5. Integration der rationalen Funktionen . . . . .	197
Aufstellung der Grundtypen S. 198. — Integration der Grundtypen S. 199. — Die Partialbruchzerlegung S. 200. — Beispiel. Chemische Reaktionen S. 202. — Weitere Beispiele für Partialbruchzerlegung. (Methode der unbestimmten Koeffizienten) S. 203.	
§ 6. Integration einiger anderer Funktionenklassen . . . . .	205
Vorbemerkungen über die rationale Darstellung der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen S. 205. — Integration von $R(\cos x, \sin x)$ S. 207. — Integration von $R(\mathbb{C} \circ f x, \mathbb{S} \text{in } x)$ S. 207. — Integration von $R(x, \sqrt{1-x^2})$ S. 207. — Integration von $R(x, \sqrt{x^2-1})$ S. 208. — Integration von $R(x, \sqrt{x^2+1})$ S. 208. — Integration von $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$ S. 208. — Weitere Beispiele für Zurückführung auf Integrale rationaler Funktionen S. 209. — Bemerkungen zu den Beispielen S. 210.	
§ 7. Bemerkungen über Funktionen, die sich nicht mittels der elementaren Funktionen integrieren lassen . . . . .	211
Definition von Funktionen durch Integrale. Elliptische Integrale S. 211. — Grundsätzliches über Differentiation und Integration S. 213.	
§ 8. Erweiterung des Integralbegriffes. Uneigentliche Integrale . . . . .	214
Funktionen mit Sprungstellen S. 214. — Funktionen mit Unendlichkeitsstellen S. 214. — Unendliches Integrationsintervall S. 217.	

<b>Anhang zum vierten Kapitel.</b>		Seite
Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .		222

### Fünftes Kapitel.

#### Anwendungen.

§ 1. Darstellung von Kurven . . . . .	223
Die Parameterdarstellung S. 223 — Die zu einer Kurve gehörigen Differentialquotienten bei Parameterdarstellung S. 226. — Übergang zu neuen Koordinatensystemen bei Parameterdarstellung S. 228. — Allgemeine Bemerkungen S. 229.	
§ 2. Anwendung auf die Theorie der ebenen Kurven . . . . .	230
Der Flächeninhalt in rechtwinkligen Koordinaten S. 230. — Die Unabhängigkeit vom Koordinatensystem S. 235. — Beispiel: Ellipse S. 236. — Flächeninhalt in Polarkoordinaten S. 236. — Länge einer Kurve S. 237. — Krümmung S. 241. — Schwerpunkt und statisches Moment einer Kurve S. 243. — Flächeninhalt und Volumen einer Rotationsfläche S. 244. — Trägheitsmoment S. 245.	
§ 3. Beispiele . . . . .	246
Die Zykloide S. 246. — Kettenlinie S. 247. — Ellipse und Lemniskate S. 248.	
§ 4. Die einfachsten Probleme der Mechanik . . . . .	249
Grundvoraussetzungen aus der Mechanik S. 249. — Freier Fall. Reibung S. 251. — Die einfachste elastische Schwingung S. 253. — Die allgemeine Bewegung auf einer vorgegebenen Kurve S. 254.	
§ 5. Weitere Anwendungen: Fall eines Massenpunktes auf einer Kurve . . .	256
Allgemeines S. 256. — Diskussion der Bewegung S. 258. — Das gewöhnliche Pendel S. 259. — Das Zykloidenpendel S. 260.	
§ 6. Arbeit . . . . .	261
Allgemeines S. 261. — Erstes Beispiel. Massenanziehung S. 263. — Zweites Beispiel. Spannen einer Feder S. 264. — Drittes Beispiel. Aufladen eines Kondensators S. 264.	

#### Anhang zum fünften Kapitel.

Eigenschaften der Evolute . . . . .	265
-------------------------------------	-----

### Sechstes Kapitel.

#### Die TAYLORSche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganze rationale.

§ 1. Der Logarithmus und der Arcustangens . . . . .	268
Der Logarithmus S. 268. — Der Arcustangens S. 271.	
§ 2. Die allgemeine TAYLORSche Formel . . . . .	272
Die TAYLORSche Formel für ganze rationale Funktionen S. 272. — Die TAYLORSche Formel für eine beliebige Funktion S. 273. — Abschätzung des Restgliedes S. 276.	
§ 3. Anwendungen. Entwicklung der elementaren Funktionen . . . . .	278
Die Exponentialfunktion. Irrationalität von $e$ S. 278. — $\sin x$ , $\cos x$ , $\mathcal{E}_n x$ , $\mathcal{C}_n x$ S. 280. — Die binomische Reihe. Ein allgemeiner Satz über Konvergenz der TAYLORSchen Reihe einer Funktion mit nicht negativen Ableitungen aller Ordnungen S. 281.	



	Seite
§ 4. Geometrische Anwendungen . . . . .	285
Berührung von Kurven S. 285. — Der Krümmungskreis als Oskulationskreis S. 287. — Zur Theorie der Maxima und Minima S. 287.	

**Anhang zum sechsten Kapitel.**

§ 1. Beispiel einer Funktion, die sich nicht in eine TAYLORSche Reihe entwickeln läßt . . . . .	288
§ 2. Approximation beliebiger stetiger Funktionen durch Polynome und trigonometrische Summen . . . . .	289
Der Satz von WEIERSTRASS S. 289. — Approximation von $ \mathfrak{x} $ S. 289. — Beweis des WEIERSTRASSschen Approximationssatzes S. 291. — Anwendungen. — Trigonometrische Approximation S. 292.	
§ 3. Nullstellen, Unendlichkeitsstellen von Funktionen und sog. unbestimmte Ausdrücke . . . . .	293
§ 4. Interpolation . . . . .	296
Problemstellung und Vorbemerkungen S. 296. — Konstruktion der Lösung. Die NEWTONSche Interpolationsformel S. 298. — Restabschätzung S. 300. — Die Interpolationsformel von LAGRANGE S. 302.	

Siebentes Kapitel.

**Exkurs über numerische Methoden.**

Vorbemerkungen . . . . .	302
§ 1. Numerische Integration . . . . .	303
Rechtecksregel S. 303. — Trapezformel und Tangentenformel. S. 304 — Die SIMPSONSche Regel S. 304. — Beispiele S. 305. — Fehlerabschätzung S. 306.	
§ 2. Anwendungen des Mittelwertsatzes und des TAYLORSchen Satzes . . . .	308
Die „Fehlerrechnung“ S. 308. — Berechnung von $\pi$ S. 310. — Berechnung der Logarithmen S. 311.	
§ 3. Numerische Auflösung von Gleichungen . . . . .	312
Das Verfahren von NEWTON S. 312. — Regula falsi S. 314. — Beispiel S. 315. — Das Iterationsprinzip S. 315.	

**Anhang zum siebenten Kapitel.**

Die STIRLINGSche Formel . . . . .	317
-----------------------------------	-----

Achstes Kapitel.

**Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse.**

Vorbemerkungen . . . . .	320
§ 1. Die Begriffe Konvergenz und Divergenz . . . . .	321
Grundbegriffe S. 321. — Absolute und bedingte Konvergenz S. 323. — Umordnung der Reihenglieder S. 326. — Das Rechnen mit unendlichen Reihen S. 329.	
§ 2. Untersuchung der Konvergenz und Divergenz . . . . .	330
Das Prinzip der Reihenvergleichung S. 330. — Vergleichung mit der geometrischen Reihe S. 331. — Vergleichung mit einem Integral S. 333.	
§ 3. Grenzübergänge und Reihen von Funktionen einer Veränderlichen . . .	335
Allgemeines S. 335. — Grenzübergänge mit Funktionen und Kurven S. 336.	

	Seite
§ 4. Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz . . . . .	338
Allgemeines und Beispiele S. 338. — Kriterium der gleichmäßigen Konvergenz S. 342. — Stetigkeit gleichmäßig konvergenter Reihen stetiger Funktionen S. 344. — Die Integration gleichmäßig konvergenter Reihen S. 345. — Differentiation unendlicher Reihen S. 346.	
§ 5. Potenzreihen . . . . .	347
Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe S. 348. — Die Integration und Differentiation von Potenzreihen S. 350. — Das Rechnen mit Potenzreihen S. 351. — Eindeutigkeitssatz für die Potenzreihen S. 352.	
§ 6. Entwicklung gegebener Funktionen in Potenzreihen. Methode der unbestimmten Koeffizienten. Beispiele . . . . .	353
Die Exponentialfunktion S. 354. — Die binomische Reihe S. 354. — Die Reihe für $\arcsin x$ S. 356. — Die Potenzreihenentwicklung von $\arcsin x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ S. 356. — Beispiel für Reihenmultiplikation S. 357. — Beispiel für gliedweises Integrieren. Elliptisches Integral S. 357.	
§ 7. Potenzreihen mit komplexen Gliedern . . . . .	358
Einführung komplexer Glieder in Potenzreihen S. 358. — Ausblick auf die allgemeine Theorie analytischer Funktionen S. 360.	

#### Anhang zum achten Kapitel.

§ 1. Multiplikation und Division von Reihen . . . . .	361
Multiplikation absolut konvergenter Reihen S. 361. — Multiplikation und Division von Potenzreihen S. 362.	
§ 2. Grenzübergänge, die mit der Exponentialfunktion zusammenhängen . .	363
Die Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$ S. 363. — Bemerkung über Integration und Differentiation der Exponentialfunktion S. 365. — Beweis der Formel $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ S. 365.	
§ 3. Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale . . . . .	366
§ 4. Unendliche Produkte . . . . .	368
§ 5. Weitere Beispiele für unendliche Reihen . . . . .	370
Verschiedene Entwicklungen S. 370.	

#### Neuntes Kapitel.

#### FOURIERSche Reihen.

§ 1. Die periodischen Funktionen . . . . .	373
Allgemeines S. 373. — Zusammensetzung von reinen Schwingungen. Obertöne. Schwebungen S. 376.	
§ 2. Die Verwendung der komplexen Schreibweise . . . . .	380
Allgemeine Bemerkungen S. 380. — Anwendung in der Lehre vom Wechselstrom S. 381. — Komplexe Darstellung der Superposition von reinen Schwingungen S. 383. — Ableitung einer trigonometrischen Formel S. 383.	
§ 3. Beispiele für die FOURIERSche Reihe . . . . .	384
Form der FOURIERSchen Reihenentwicklung S. 384. — Entwicklung der Funktionen $\psi(x) = x$ und $\varphi(x) = x^2$ S. 386. — Entwicklung der Funktion $x \cos x$ S. 387. — $f(x) =  x $ S. 388. — 5. Beispiel S. 389. —	

	Seite
$f(x) =  \sin x $ S. 389. — Entwicklung der Funktion $\cos \mu x$ . Partialbruchzerlegung des Kotangens. Produktzerlegung des Sinus S. 389. — Weitere Beispiele S. 391.	
§ 4. Beweis der FOURIERSchen Reihenentwicklung . . . . .	391
Die Konvergenz der FOURIERSchen Reihe einer stückweise glatten Funktion S. 391. — Genauere Untersuchung der Konvergenz. — BESSELsche Ungleichung S. 396.	
§ 5. Die mittlere Approximation durch trigonometrische Polynome . . . . .	400

**Anhang zum neunten Kapitel.**

§ 1. BERNOULLISCHE Polynome und ihre Anwendungen . . . . .	404
Definition und FOURIER-Entwicklung S. 404. — Erzeugende Funktion und TAYLORSche Reihe des trigonometrischen und hyperbolischen Kotangens S. 406. — EULERSche Summenformel S. 408. — Anwendungen (konvergente Entwicklungen, Summen von Potenzen, Rekursionsformeln für die BERNOULLISchen Zahlen, EULERSche Konstante, STIRLINGs Formel, Asymptotische Reihenauswertungen) S. 410.	
§ 2. Integration von FOURIERSchen Reihen . . . . .	415
§ 3. Trigonometrische Interpolation . . . . .	417
Die Interpolationsformel S. 417. — Beispiele zur trigonometrischen Interpolation S. 421.	

Zehntes Kapitel.

**Die Differentialgleichungen  
der einfachsten Schwingungsvorgänge.**

§ 1. Schwingungsprobleme der Mechanik und Physik . . . . .	426
Einfachste mechanische Schwingungen S. 426. — Elektrische Schwingungen S. 428.	
§ 2. Lösung der homogenen Gleichung. Freie Bewegungen . . . . .	429
Formale Auflösung S. 429. — Physikalische Deutung der Lösung S. 431. — Anpassung an gegebene Anfangsbedingungen. Eindeutigkeit der Lösung S. 432.	
§ 3. Unhomogene Gleichung. Erzwungene Bewegungen . . . . .	433
Allgemeine Bemerkungen S. 433. — Lösung der unhomogenen Gleichung S. 435. — Die Resonanzkurve S. 436. — Nähere Diskussion des Schwingungsablaufes S. 439. — Bemerkungen über Registrierinstrumente S. 440.	
Schlußbemerkung . . . . .	442
Sachverzeichnis . . . . .	443