

# Mathematik

Vorlesungen für Ingenieurschulen

Von

**Oberbaurat Gert Böhme**

Dozent für Mathematik  
an der Staatl. Ingenieurschule Furtwangen

**Zweiter Band**

**Einführung in die Höhere Mathematik**

**Zweite durchgesehene Auflage**

**Mit 257 Abbildungen**



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

**Alle Rechte vorbehalten**

**Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche  
Genehmigung des Springer-Verlages übersetzt  
oder in irgendeiner Form  
vervielfältigt werden**

**ISBN 978-3-662-00561-3      ISBN 978-3-662-00560-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-00560-6**

**© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1968.**

**Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1964 and 1968.**

**Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1968**

**Library of Congress Catalog Card Number: 68-55375**

**Titel-Nr. 1201**

## Vorwort zur zweiten Auflage

Die außerordentlich große Resonanz, die auch der zweite Band der „Mathematik, Vorlesungen für Ingenieurschulen“ gefunden hat, bestätigt die hier getroffene Stoffauswahl und deren methodische Gestaltung. Nach wie vor bildet die Differential- und Integralrechnung das nach Umfang und Bedeutung wichtigste Kapitel der mathematischen Ausbildung unserer Ingenieure und bedarf deshalb einer besonders gründlichen Behandlung. Dabei ist eine auf das mathematische Verständnis abzielende Darlegung der grundlegenden Begriffsbildungen ebenso wichtig wie ein Aufzeigen der mannigfaltigen Anwendungen in Technik und Naturwissenschaft.

Bei der Durchsicht wurden nicht nur Druck- und Rechenfehler beseitigt, sondern zugleich eine größere Anzahl methodischer Verbesserungen vorgenommen. Vorschläge und Anregungen dazu kamen in großer Menge von den Dozenten der Ingenieurschulen, welche nicht die Mühe gescheut haben, sich kritisch mit dem Werk auseinanderzusetzen. Ihnen sei an dieser Stelle Dank und Anerkennung ausgesprochen. Zugleich möchte ich um Verständnis bitten, wenn nicht allen Beiträgen entsprochen werden konnte. Dies gilt in erster Linie für die Aufnahme mathematischer Spezialgebiete, die heute noch nicht überall zum obligatorischen Lehrstoff der Ingenieurschulen gehören. Der Inhalt des zur Zeit noch zweibändigen Unterrichtswerkes entspricht der Mathematik als Grundlagenfach, so wie es für die Studierenden aller Fachrichtungen relevant ist.

Dem Springer-Verlag bin ich für die Berücksichtigung meiner Wünsche sowie für die gute Ausstattung des Buches ein weiteres Mal zum Dank verpflichtet.

Furtwangen, im Mai 1968

Gert Böhme

## Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Die Höhere Mathematik stellt heute das Kernstück der mathematischen Ausbildung unserer Ingenieure dar. Ihr gebührt deshalb auch an der Ingenieurschule eine besondere Beachtung.

Die Forderung der Fachkollegen zielt hin auf eine möglichst frühzeitige Behandlung der Differentialrechnung. Der Mathematiker wird diesen Wünschen Rechnung tragen müssen, da er seine Vorlesungen dem allgemeinen Lehrplan seiner Schule anpassen muß. Andererseits wird es gerade sein Bestreben sein, auf ein Verstehen des Stoffes hinzuwirken und das ganze Gebäude der Infinitesimalrechnung auf eine solide Grundlage zu stellen.

Alles in allem habe ich meinen Vorlesungen jenes Maß an wissenschaftlicher Strenge zugrunde gelegt, das ich an der Ingenieurschule für angebracht halte und welches sich in meiner Unterrichtspraxis bewährt hat.

Überall habe ich eine leichte Lesbarkeit angestrebt. Der Studierende soll in der Lage sein, seine Vorlesung mit diesem Buch nacharbeiten zu können. Sollte dabei die in seiner Vorlesung gebotene Darstellung von der in diesem Buche befindlichen abweichen, was vielleicht sogar die Regel sein wird, so ist das Kennenlernen des Stoffes unter einem etwas anderen Blickwinkel sowohl vom fachlichen als auch vom pädagogischen Standpunkt aus nur vorteilhaft für ihn. Über 400 vollständig durchgerechnete Beispiele, welche den Text ergänzen und auf Anwendungsmöglichkeiten in Physik und Technik hinweisen, werden ihm dabei eine besondere Hilfe sein.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr.-Ing. RUDOLF ZURMÜHL für die Durchsicht des Manuskriptes und Herrn Oberbaurat Dipl.-Ing. FRIEDRICH SIMON für seine ständige Mitarbeit und Beratung danken. Für die mühevollte Anfertigung des Schreibmaschinentextes beider Bände sowie die Mitarbeit beim Korrekturlesen bin ich meiner lieben Frau besonders herzlich verbunden. Herr Ing. KLAUS WAGENMANN hat auch bei diesem Band die Zeichnungen übertragen. Nicht zuletzt gilt mein Dank den Mitarbeitern des Springer-Verlages für ihr bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche sowie die gute Ausstattung, welche sie auch diesem Bande angedeihen ließen.

Furtwangen, im April 1964

**Gert Böhme**

# Inhaltsverzeichnis

## 1 Analytische Geometrie

1.1 Die analytische Methode . . . . .	1
1.1.1 Punkte und Koordinaten . . . . .	1
1.1.2 Kurve und Funktionsgleichung . . . . .	2
1.1.3 Einfachste Beispiele . . . . .	3
1.1.4 Polarkoordinaten . . . . .	8
1.2 Die Gerade . . . . .	10
1.2.1 Die Normalform der Geradengleichung . . . . .	10
1.2.2 Die Zweipunkteform . . . . .	10
1.2.3 Die Punkt-Steigungsform . . . . .	12
1.2.4 Die Achsenabschnittsform . . . . .	12
1.2.5 Die allgemeine Form . . . . .	13
1.2.6 Die Hessesche Normalform . . . . .	15
1.2.7 Die Polarform . . . . .	19
1.2.8 Schnittpunkt zweier Geraden . . . . .	20
1.2.9 Schnittwinkel zweier Geraden . . . . .	23
1.3 Koordinatentransformationen . . . . .	24
1.3.1 Problemstellung . . . . .	24
1.3.2 Parallelverschiebung des Koordinatensystems . . . . .	25
1.3.3 Drehung des Koordinatensystems . . . . .	29
1.3.4 Invarianzeigenschaften . . . . .	31
1.4 Der Kreis . . . . .	32
1.4.1 Kreisgleichungen . . . . .	32
1.4.2 Tangente, Normale und Polare des Kreises . . . . .	37
1.5 Die Ellipse . . . . .	41
1.5.1 Die senkrecht-affine Abbildung . . . . .	41
1.5.2 Die Ellipse als affines Bild eines Kreises . . . . .	45
1.5.3 Ellipsengleichungen . . . . .	48
1.5.4 Brennpunkteigenschaften der Ellipse . . . . .	52
1.5.5 Tangente, Normale und Polare der Ellipse . . . . .	54
1.6 Die Hyperbel . . . . .	56
1.6.1 Hyperbelgleichungen . . . . .	56
1.6.2 Die Hyperbeltangente . . . . .	65
1.7 Die Parabel . . . . .	67
1.7.1 Parabelgleichungen . . . . .	67
1.7.2 Die Parabeltangente . . . . .	72
1.8 Die allgemeine Kegelschnittsgleichung . . . . .	74
1.8.1 Vorbemerkungen . . . . .	74
1.8.2 Identifizierung . . . . .	75
1.8.3 Die Hauptachsentransformation . . . . .	76

**2 Vektoralgebra**

<b>2.1 Der Vektorbegriff</b> . . . . .	<b>78</b>
<b>2.2 Geometrische Vektordarstellung</b> . . . . .	<b>80</b>
2.2.1 Addition von Vektoren . . . . .	80
2.2.2 Subtraktion eines Vektors . . . . .	82
2.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	83
2.2.4 Das skalare Produkt . . . . .	86
2.2.5 Das vektorielle Produkt . . . . .	93
<b>2.3 Basisdarstellung von Vektoren</b> . . . . .	<b>98</b>
2.3.1 Komponenten und Koordinaten eines Vektors . . . . .	98
2.3.2 Rechnen mit Vektoren in Basisdarstellung . . . . .	100
2.3.3 Skalares Produkt in Basisdarstellung . . . . .	101
2.3.4 Vektoriell Produkt in Basisdarstellung . . . . .	102
2.3.5 Die Richtungskosinus eines Vektors . . . . .	103
2.3.6 Einige Anwendungen . . . . .	105
<b>2.4 Tripeldarstellung von Vektoren</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>2.5 Mehrfache Produkte</b> . . . . .	<b>110</b>
2.5.1 Das gemischte oder Spatprodukt . . . . .	110
2.5.2 Das dreifache Vektorprodukt . . . . .	113
2.5.3 Das vierfache Produkt $(a \times b) \cdot (c \times d)$ . . . . .	114
<b>2.6 Komplexe Vektoren</b> . . . . .	<b>117</b>
<b>2.7 Matrizen</b> . . . . .	<b>118</b>

**3 Differentialrechnung**

<b>3.1 Grenzwerte</b> . . . . .	<b>125</b>
3.1.1 Konvergente Zahlenfolgen . . . . .	125
3.1.2 Grenzwerte von Funktionen . . . . .	132
3.1.3 Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	136
3.1.4 Stetigkeit von Funktionen . . . . .	138
<b>3.2 Der Begriff der Ableitungsfunktion</b> . . . . .	<b>141</b>
3.2.1 Die Ableitungsfunktion als Steigungsfunktion . . . . .	141
3.2.2 Die Ableitung als Grenzwert . . . . .	143
3.2.3 Bestimmung von Ableitungsfunktionen . . . . .	145
3.2.4 Ableitbarkeit und Stetigkeit . . . . .	148
<b>3.3 Formale Ableitungsrechnung</b> . . . . .	<b>149</b>
3.3.1 Konstanten-, Faktor- und Summenregel . . . . .	149
3.3.2 Die Potenzregel für ganze positive Exponenten . . . . .	150
3.3.3 Produkt- und Quotientenregel . . . . .	151
3.3.4 Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	155
3.3.5 Die Kettenregel . . . . .	158
3.3.6 Ableitung der Kreisfunktionen . . . . .	164
3.3.7 Ableitung der Bogenfunktionen . . . . .	166
3.3.8 Ableitung von Logarithmus- und Exponentialfunktion . . . . .	168
3.3.9 Logarithmisches Ableiten . . . . .	170
3.3.10 Ableitung der Hyperbelfunktionen . . . . .	172
3.3.11 Ableitung der Areafunktionen . . . . .	173

3.4 Differentiale. Differentialquotienten. Differentialoperatoren . . . . . 174

    3.4.1 Der Begriff des Differentials . . . . . 174

    3.4.2 Zusammenhang zwischen Differenzen und Differentialen . . . . . 176

    3.4.3 Rechnen mit Differentialen . . . . . 177

    3.4.4 Der Differentialquotient . . . . . 179

    3.4.5 Differentialquotienten höherer Ordnung . . . . . 182

    3.4.6 Grundsätzliche Bemerkungen . . . . . 183

    3.4.7 Differentialoperatoren . . . . . 184

3.5 Kurvenuntersuchungen . . . . . 186

    3.5.1 Steigen und Fallen. Extrempunkte . . . . . 186

    3.5.2 Links- und Rechtskurven. Wendepunkte . . . . . 188

    3.5.3 Sonstige geometrische Eigenschaften . . . . . 190

    3.5.4 Untersuchung algebraischer Funktionen . . . . . 192

    3.5.5 Untersuchung transzendenter Funktionen . . . . . 197

    3.5.6 Angewandte Maxima- und Minimaufgaben . . . . . 204

3.6 Weitere Anwendungen der Differentialrechnung . . . . . 208

    3.6.1 Tangenten und Tangentenabschnitte . . . . . 208

    3.6.2 Linearisierung von Funktionen . . . . . 210

    3.6.3 Der Mittelwertsatz . . . . . 213

    3.6.4 Grenzwertbestimmung mit der Regel von BERNOULLI und  
DE L'HOSPITAL . . . . . 216

    3.6.5 Das NEWTONsche Iterationsverfahren . . . . . 223

3.7 Funktionen von zwei reellen Veränderlichen . . . . . 231

    3.7.1 Der Funktionsbegriff . . . . . 231

    3.7.2 Analytische Darstellungsformen . . . . . 231

    3.7.3 Geometrische Darstellungsformen . . . . . 233

    3.7.4 Skalare Darstellung durch Leitertafeln . . . . . 238

    3.7.5 Raumkurven . . . . . 241

    3.7.6 Partielle Ableitungen . . . . . 242

    3.7.7 Das totale (vollständige) Differential . . . . . 246

    3.7.8 Anwendungen in der Fehlerrechnung . . . . . 247

    3.7.9 Ableitung impliziter Funktionen . . . . . 252

    3.7.10 Ableiten von Parameterdarstellungen . . . . . 254

    3.7.11 Ableiten von Vektorfunktionen . . . . . 257

    3.7.12 Krümmungskreise und Schmiegunngsparabeln . . . . . 259

    3.7.13 Ableiten von Funktionen in Polarkoordinaten . . . . . 267

**4 Integralrechnung**

4.1 Das unbestimmte Integral . . . . . 271

    4.1.1 Begriff des unbestimmten Integrals . . . . . 271

    4.1.2 Zwei Integrationsregeln . . . . . 274

    4.1.3 Die Grundintegrale . . . . . 274

4.2 Formale Integrationsmethoden . . . . . 276

    4.2.1 Die Substitutionsmethode . . . . . 277

    4.2.2 Die Methode der Produktintegration . . . . . 288

    4.2.3 Integration durch Rekursion . . . . . 291

    4.2.4 Integration durch Partialbruchzerlegung . . . . . 293

4.3 Das bestimmte Integral . . . . . 302

    4.3.1 Definition des bestimmten Integrals . . . . . 302

    4.3.2 Der Hauptsatz der Integralrechnung. Flächenbestimmungen 305

4.3.3	Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe . . . . .	313
4.3.4	Bestimmung von Bogenlängen . . . . .	315
4.3.5	Bestimmung von Rauminhalten und Mantelflächen von Rotationskörpern . . . . .	318
4.3.6	Bestimmung geometrischer Schwerpunkte . . . . .	320
4.4	Numerische Integration . . . . .	323
4.4.1	Aufgabenstellung. Übersicht . . . . .	323
4.4.2	Aufstellung der Näherungsformeln . . . . .	325
4.4.3	Eigenschaften der SIMPSONSchen Formel . . . . .	328
4.5	Graphische Integration und Differentiation . . . . .	335
<b>5 Unendliche Reihen</b>		
5.1	Der Begriff der unendlichen Reihe . . . . .	338
5.2	Geometrische Reihen . . . . .	340
5.3	Reihen mit konstanten Gliedern. Konvergenzkriterien . . . . .	344
5.3.1	Reihen mit lauter positiven Gliedern . . . . .	344
5.3.2	Alternierende Reihen . . . . .	349
5.4	Potenzreihen . . . . .	351
5.4.1	Begriff der Potenzreihe . . . . .	351
5.4.2	Potenzreihendarstellung von Funktionen . . . . .	354
5.4.3	MACLAURIN-Reihen und MACLAURIN-Polynome . . . . .	356
5.4.4	Potenzreihenentwicklung durch unbestimmten Ansatz . . . . .	365
5.4.5	Potenzreihenentwicklung durch Integration . . . . .	367
5.4.6	TAYLOR-Reihen . . . . .	371
5.5	Integration durch Potenzreihenentwicklung . . . . .	376
5.6	Elliptische Integrale . . . . .	378
5.7	FOURIER-Reihen . . . . .	381
<b>6 Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>		
6.1	Allgemeine Begriffsbildungen . . . . .	386
6.2	Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	390
6.2.1	Trennung der Veränderlichen . . . . .	390
6.2.2	Homogene Differentialgleichungen . . . . .	392
6.2.3	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	395
6.2.4	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	397
6.2.5	BERNOULLISCHE Differentialgleichung . . . . .	400
6.2.6	Geometrische Lösungsmethode . . . . .	401
6.3	Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	403
6.3.1	Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	403
6.3.2	Integrable Typen . . . . .	404
6.3.3	Homogene lineare Differentialgleichungen . . . . .	407
6.3.4	Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	412
6.3.5	Inhomogene lineare Differentialgleichungen . . . . .	420
6.3.6	Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	423
6.4	Schlußbemerkung . . . . .	427
<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>		<b>429</b>