Figurierte Zahlen als produktiver Weg in die Mathematik

Marc Sauerwein

Figurierte Zahlen als produktiver Weg in die Mathematik

Ein Entwicklungsforschungsprojekt im Kontext einer Internationalen Vorbereitungsklasse

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Rainer Kaenders

Springer Spektrum

Marc Sauerwein
Bonn, Deutschland

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn genehmigte Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.).

Datum der Verteidigung: 14. Januar 2019

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Kaenders, Prof. Dr. Andreas Büchter

ISBN 978-3-658-27649-2 ISBN 978-3-658-27650-8 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27650-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Manche von ihnen haben in einer Religionsschule nur rudimentäre Arithmetik gelernt, andere sind in einer staatlichen Schule mit den Anfängen der Infinitesimalrechnung in Kontakt gekommen und eine kleine Gruppe hat eine gediegene mathematische Grundbildung erhalten. Sie alle sind mit sehr individuellen, teilweise traumatischen, Erlebnissen im Gepäck in einer für sie komplizierten und undurchschaubaren deutschen Gesellschaft angekommen und nun in einer Klasse zusammen. Wie kann in einer solchen Klasse Mathematikunterricht gelingen? Nähert man sich dieser Frage an, kann das ganze Repertoire der Mathematikdidaktik und der Pädagogik hilfreich sein.

Dieses Buch stellt ein Forschungsprojekt zu Unterricht in elementarer Algebra mit Schülerinnen und Schüler in Internationalen Vorbereitungsklassen (IVK) vor. Mit diesem Unterricht sollten die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützt werden, einen Schulabschluss im deutschen Bildungssystem zu erlangen; das sind im Einzelnen ein Hauptschulabschluss, ein Hauptschulabschluss nach Klasse 10, ein Mittlerer Schulabschluss oder ein Abitur. Lässt man sich auf die Hintergründe der hier zu unterrichtenden Menschen ein, so erkennt man schnell, dass sich mit dem Unterricht an meist geflüchtete Menschen tiefe und grundsätzliche Fragen in verschiedenen Bereichen von Bildung, Kultur, Mathematik, Mathematikphilosophie und -geschichte, Psychologie und mit all dem grundlegende Fragen der Mathematikdidaktik verbinden. Dies geschieht vor dem Hintergrund von Institutionen, Medien und politischen Verhältnissen. Die Erforschung dieses Unterrichts ist relevant, da Vorstellungen und Materialien zu einem gelungenen Mathematikunterricht in einer IVK teilweise noch nicht existieren, sehr variieren oder sich noch bewähren müssen.

In seinem Forschungsansatz betrachtet Marc Sauerwein die mathematikdidaktische Forschung als Entwicklungsforschung (*Design Science* im Sinne von E.Ch. Wittmann, vgl. das Kapitel 4 über Methodik). Dabei sieht sich der Forscher als forschungsbasierte(r) Entwickler(in). Hierfür bedarf es sehr genauer Kenntnisse in relevanten Wissensgebieten, wie der dazugehörigen Mathematikdidaktik und ihren Lerntheorien, der Elementarmathematik, der Mathematikgeschichte und -philosophie. Die Forschungsarbeit besteht nun darin, die zu diesem Zweck notwendigen Hintergründe sorgfältig herauszuarbeiten und in genauer Kenntnis und unter Verwendung dieser Hintergründe Designprinzipien entsprechenden Unterrichts zu *entwickeln*. Dabei begibt man sich – oft auch im Team – in einen Entwicklungszyklus, der sich von dem in den Grundlagen der Naturwissenschaften häufig verwendeten hypothetisch-deduktiven Zyklus unterscheidet (vgl. S. 63). Über letzteren gewinnt man vornehmlich Erkenntnisse als solche, während der Entwicklungszyklus einen entsprechenden Unterricht auch *hervorbringen* sollte.

Genau dies gelingt in dieser Arbeit. Zunächst werden die vielfältigen Aspekte, die mit dem Unterricht zur elementaren Algebra und insbesondere zu Figurierten Zahlen in einer IVK zusammenhängen, nachvollziehbar erkannt. Sie werden vor dem Hintergrund von Forschungsergebnissen in verschiedenen Bereichen der modernen und klassischen Mathematikdidaktik und der Bildungswissenschaft auf hermeneutische Weise begrifflich sauber aufgearbeitet. Aus dieser Perspektive gelingt es, die sich in dem durchgeführten Unterricht ergebenden Gestaltungsnotwendigkeiten, Bedingungen, Situationen und Fragen einzuordnen und entlang der zuvor dargestellten Perspektiven und Prinzipien zu entwickeln. Die mit dem Unterricht in einer IVK verbundene inhaltliche und methodische Freiheit und die dort sichtbar werdenden Voraussetzungen für gelingenden Mathematikunterricht bieten zudem auch die Gelegenheit über Bildungsfragen für den gesamten Mathematikunterricht neu nachzudenken, was noch zusätzlich durch einen Zyklus der Unterrichtseinheit in einer Regelklasse unterstützt wird.

Aber ist es denn gerechtfertigt, mag man an dieser Stelle einwenden, so viel Aufwand für den Unterricht in wenigen Klassen einer einzigen Schule zu betreiben? Dazu muss man wissen, dass hinter diesem Ansatz ein weitergehender Anspruch steht: Versucht man nämlich eine solche Unterrichtsentwicklung auf wissenschaftliche Weise durchzuführen, wird nicht unbedingt nur der in Frage stehende Unterricht entwickelt, sondern es entstehen so genannte *lokale Theorien* (S. 59), die ihrerseits wieder Grundlage für allgemeine Einsichten liefern können. Auch, wenn diese Herangehensweise mühsam ist, so leistet sie durch ihre Erdung in der Praxis einerseits und ihre Verbindung mit theoretischen Ansätzen andererseits der Weiterentwicklung von Mathematikunterricht Vorschub.

Der vorliegende Forschungsbericht gibt einen umfassenden, sehr lesenswerten Einblick in die moderne Mathematikdidaktik zur Elementaren Algebra und insbesondere zu Figurierten Zahlen im Kontext einer Internationalen Vorbereitungsklasse. Es wird deutlich, wie sehr einschlägige Begriffsarbeit und ein konzeptueller theoretischer Rahmen in mathematikdidaktischer Entwicklungsforschung fruchtbar werden können.

Mit der Durchführung dieser Entwicklungsforschung werden die vorgestellten mathematikdidaktischen Konzepte, Perspektiven und Erkenntnisse für die Entwicklung ganz konkreten Unterrichts eingesetzt und daraus werden dann wieder wertvolle allgemeinere Lehren gezogen, die gewissem Maße auch als prototypisch für heterogene Lerngruppen gelten können. So wird nicht nur die Entwicklung von Unterricht in Internationalen Vorbereitungsklassen einen Schritt nach vorne gebracht.

Bonn am Rhein, Juni 2019

Rainer Kaenders

Vorwort

Als ich Ende 2014 mit dem Gedanken spielte in der Didaktik der Mathematik zu promovieren, schien das Thema *Symmetrie* und mögliche Umsetzungen im Unterricht, z.B. als durchziehende fundamentale Idee, schon in Stein gemeißelt zu sein. Aus Sicht meines Studiums der Darstellungstheorie war dies in meinen Augen ein naheliegendes Ansinnen. So beschrieb mein Betreuer der Masterarbeit Prof. Dr. Geordie Williamson das Gebiet der Darstellungstheorie mit dem Motto „don't underestimate symmetry“.[1] Diese voreilige und auch naive Einschätzung bezüglich der unterrichtlichen Praxis relativierte sich nach eingehenden Literaturrecherchen und Gesprächen mit verschiedenen Lehrerinnen und Lehrern. Trotz bekundetem Interesse an dem Thema Symmetrie war dies kein vorrangiges Problem in ihrem eigenen Unterricht. Ein zentrales Anliegen meines Forschungsvorhabens war – und ist es immer noch – im weitesten Sinne die unterrichtliche Praxis zu verbessern.

Dementsprechend änderte sich der Fokus auf die elementare Algebra. Durch den glücklichen Zufall des Kontaktes zu einer Internationalen Vorbereitungsklasse hat sich dann die spannende Kombination ergeben, die in dieser Dissertation behandelt wird: *Algebraunterricht in einer Internationalen Vorbereitungsklasse* mithilfe von *Figurierten Zahlen*. Auch bei diesem faszinierenden mathematischen Gegenstand darf Symmetrie keineswegs unterschätzt werden.

An dieser Stelle möchte ich zuallererst meinem Betreuer *Prof. Dr. Rainer Kaenders* danken. Von Beginn an hat er mir die Möglichkeiten und Freiheiten gegeben, das Projekt nach meinen Vorstellungen zu gestalten und damit eine eigene Sichtweise auf Mathematikdidaktik zu entwickeln. Durch die Betreuung seiner Vorlesung Didaktik der Mathematik 1 im Wintersemester 2014/15 habe ich sehr allgemeine Perspektiven aus dem Feld der Mathematikdidaktik kennenlernen dürfen, die für meine eigene Entwicklung immer wieder neue, produktive Einsichten bereithielten. Wann immer ich an einer wichtigen Abzweigung angelangt war, konnte ich mich voll und ganz auf seine wertvollen Ratschläge verlassen, ohne dass er mich jemals in eine Richtung gedrängt hätte. Seine geometrische Sicht – auch auf die Algebra – konnten mir häufig neue, wertvolle Perspektiven eröffnen. So entstand schrittweise mein eigenes Forschungsprojekt.

Alle diese Freiheiten wurden mir aus finanzieller Sicht vor allem durch ein *Hausdorff Scholarship* des *Hausdorff Centre for Mathematics* und der angegliederten Graduiertenschule *Bonn International Graduate School of Mathematics* ermöglicht. Dafür möchte mich an dieser Stelle bedanken.

[1] Ein sehr schönes Exposé dazu wurde 2013 im Jahrbuch der Max-Planck-Gesellschaft veröffentlicht (Williamson, 2013).

Das Projekt hätte ohne die reibungslose Kooperation mit der Otto-Kühne Schule in Bonn nicht funktionieren können. Der Fachbereich Mathematik hat mich sehr freundlich aufgenommen und mir viele interessante Einblicke in den täglichen Schulalltag ermöglicht. Dafür bin ich allen Kolleginnen und Kollegen der Schule dankbar, speziell möchte ich hier *Dorothea Bade*, *Dr. Ursula Coester*, *Malte Mink* und *Anna Strunk* nennen, die alle auf ihre Weise das Projekt beeinflusst haben.

Herzlich möchte ich den Mitgliedern der Arbeitsgruppe *Mathematik und ihre Didaktik* an der Universität Bonn danken. Das Büro durfte ich in der Zeit mit *Stephan Berendonk*, *Carl Peter Fitting*, *Mareike Mink* und *Martin Rathgeb* teilen. Vielen Dank für die zahlreichen Gespräche und Diskussionen. An dieser Stelle möchte ich auch nicht *Prof. Dr. Ysette Weiss* vergessen, die mir in vielen anregenden Diskussionen andere Sichtweisen aufzeigen konnte.

Schließlich gilt ein riesiger Dank meinen Eltern *Angelika* und *Michael*, meinen Großeltern *Margret* und *Herbert*, meiner Großmutter *Christel* sowie meiner Tante *Martina* für die immerwährende Unterstützung in jeglicher Hinsicht.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Frau *Fabia* danken, dass sie mir in allen Phasen meines Promotionsprojektes zur Seite stand und mich bedingungslos unterstützt hat.

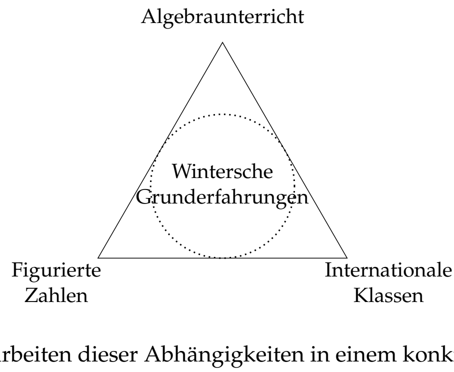
Bonn im Sommer 2019

Marc Sauerwein

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende mathematikdidaktische Dissertation untersucht exemplarisch anhand des Algebraunterrichts den Mathematikunterricht in Internationalen Klassen. Dieser scheint aufgrund der Vielfältigkeit der Schülerinnen und Schüler ein Unterfangen mit sehr komplexem Wesen zu sein – selbst im Vergleich zum ebenfalls nicht trivialen Regelunterricht. Das Verstehen dieser komplexen Natur ist ein zentrales Anliegen der Arbeit und sogleich Voraussetzung für jegliche weiterführende Forschung. Das zweite Kernanliegen ist im Sinne des *Design Research* die Entwicklung einer substantiellen Lernumgebung zur Einführung in die elementare Algebra in Internationalen Klassen.

Die Arbeit betrifft die drei Themenfelder: *Internationale Klassen* und *Figurierte Zahlen* sowie *Algebraunterricht*, die nicht hierarchisch und unabhängig voneinander bestehen, sondern in der unterrichtlichen Umsetzung vielfältig interdependent sind. Zur Veranschaulichung adaptieren wir eine Sichtweise auf das didaktische Dreieck „Lehrer – Schüler – Stoff", in der eine Beziehung, dargestellt durch eine Dreiecksseite, durch den dritten Dreieckspunkt moderiert wird.[2] Bezogen auf diese Arbeit erhalten wir das folgende Beziehungsgeflecht mit den *Winterschen Grunderfahrungen* als zusätzliche vermittelnde Komponente, die dem Mathematikunterricht eine allgemeinbildende und aufklärerische Funktion abverlangt:



Das genaue Durcharbeiten dieser Abhängigkeiten in einem konkreten Kontext ist das Ziel dieser Dissertation.

[2] Diese Sichtweise hat der Autor bei einem Vortrag von Dr. Felix Winter im Rahmen des 14. Workshops zur „Tätigkeitstheorie und kulturhistorische Schule" vom 4.-6. Mai 2018 gelernt.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis