
FOM-Edition

FOM Hochschule für Oekonomie & Management

Reihe herausgegeben von

FOM Hochschule für Oekonomie & Management, Essen, Deutschland

Dieses Werk erscheint in der FOM-Edition, herausgegeben von der FOM Hochschule für Oekonomie & Management.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/12753>

Thomas Christiaans · Matthias Ross

Wirtschaftsmathematik für das Bachelor-Studium

3., überarbeitete Auflage

 Springer Gabler



Thomas Christiaans
Siegen, Deutschland

Matthias Ross
Hamburg, Deutschland

ISSN 2625-7114

ISSN 2625-7122 (electronic)

FOM-Edition

ISBN 978-3-658-25952-5

ISBN 978-3-658-25953-2 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-25953-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Gabler

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2013, 2016, 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Speicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Gabler ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur dritten Auflage

Für die dritte Auflage haben wir das Gesamtkonzept unverändert gelassen und im Wesentlichen einige Abschnitte klarer formuliert sowie Korrekturen vorgenommen. Hierzu bedanken wir uns vorrangig bei unseren aufmerksamen Studentinnen und Studenten, die mit ihren Hinweisen maßgeblich zu diesen Änderungen beigetragen haben. Insbesondere im Kapitel 1, das sich mit schulmathematischen Grundlagen beschäftigt, haben wir weitere Übungsaufgaben ergänzt und einige Lösungen ausführlicher formuliert.

Wie zuvor danken wir der FOM Hochschule, insbesondere dem Prorektor für Forschung, Thomas Heupel, und dem Schriftleiter des Publikationswesens, Kai Stumpp, sowie Angela Meffert vom Springer Gabler-Verlag für die zuverlässige Zusammenarbeit.

Nach wie vor freuen wir uns über alle Hinweise zu (auch kleineren) Fehlern, Unklarheiten oder Unzulänglichkeiten unter lehrbuch.mathematik@fom.de.

Siegen und Hamburg

Thomas Christiaans
Matthias Ross

Vorwort zur zweiten Auflage

Wir freuen uns sehr, dass dieses Lehrbuch für viele Studierende eine wichtige Hilfe im Rahmen ihres Bachelor-Studiums ist. Die zahlreichen Rückmeldungen nehmen wir zum Anlass, uns bei allen zu bedanken, die mit ihren Kommentaren und Anmerkungen sowie ihrer Kritik zu einer Verbesserung dieses Werks beitragen.

Für die zweite Auflage haben wir das Gesamtkonzept unverändert gelassen. Manche Abschnitte wurden klarer gefasst und an einigen Stellen Ergänzungen hinzugefügt. Zu den bedeutsamsten Änderungen gehören ausführlichere Lösungen im Kapitel 1, in dem die Grundlagen aus der Schule wiederholt werden. In den Kapiteln 5 und 6 sind Aufgaben hinzugekommen. In der linearen Algebra haben wir als weitere Anwendung einen Abschnitt über innerbetriebliche Verrechnungspreise eingefügt, die durch das Lösen eines Gleichungssystems berechnet werden. Im Kapitel 6 werden jetzt auch die Kuhn-Tucker-Bedingungen kurz behandelt. Die Integralrechnung wurde um eine Anwendung aus der Mikroökonomie erweitert. Wir zeigen hier mathematisch die wichtige Erkenntnis, dass im langfristigen Gleichgewicht unter Konkurrenz der Wohlstand maximiert wird.

Auch für die zweite Auflage gilt unser Dank der FOM Hochschule, insbesondere dem Prorektor für Forschung, Thomas Heupel, und dem Schriftleiter des Publikationswesens, Kai Stumpp. Angela Meffert vom Springer Gabler-Verlag gebührt unser Dank für die stets zuverlässige und unkomplizierte Zusammenarbeit.

Trotz unseres Bemühens wird auch diese Auflage nicht fehlerfrei sein. Wir bitten deshalb jeden, der (auch kleinere) Fehler findet oder über Unklarheiten und Unzulänglichkeiten stolpert, uns unter lehrbuch.mathematik@fom.de eine Mitteilung zu geben.

Siegen und Hamburg

Thomas Christiaans
Matthias Ross

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Lehrbuch richtet sich an Studierende der wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge an Universitäten und (Fach-)Hochschulen. Es beinhaltet die mathematischen Grundlagen, die an fast allen wirtschaftswissenschaftlichen Fachbereichen gelehrt werden. Darüber hinaus werden Bezüge zu vielen betriebs- und volkswirtschaftlichen Fragestellungen hergestellt, die eine direkte Anwendung der vermittelten Methoden auf die jeweiligen wirtschaftlichen Aspekte ermöglichen.

Viele Studierende der Wirtschaftswissenschaften empfinden die Mathematik als schwierig und können gerade zu Beginn des Studiums gar nicht absehen, warum sie erforderlich ist. In weiten Teilen dieses Buches ziehen wir deshalb anschauliche ökonomische Fragestellungen als Motivation für das Erlernen entsprechender mathematischer Techniken heran, die dann an konkreten wirtschaftswissenschaftlichen Aufgaben erprobt werden. Beispielhaft seien hier die Zins-, Tilgungs- und Rentenrechnung, festverzinsliche Wertpapiere, die Produktionsplanung, die Kostenminimierung und die Gewinnmaximierung genannt.

Die Abschnitte sind mehrheitlich an einer ökonomischen Fragestellung aufgehängt und stellen anschließend die passende mathematische Methodik vor, die dann anhand von weiteren Beispielen in der Breite veranschaulicht wird. Die jeweils folgenden Übungsaufgaben orientieren sich zuerst direkt an den Beispielen und nehmen dann langsam an Komplexität zu. Die einfachen Aufgaben tragen zu einer Verinnerlichung der Methodik bei und die schwierigeren Aufgaben vermitteln die eigenständige Nutzung der verschiedenen Techniken für neue Fragestellungen. Damit der eigene Kenntnisstand unmittelbar überprüft werden kann, haben wir die teilweise ausführlichen Lösungen fortlaufend in den Text integriert. Da wir der festen Überzeugung sind, dass ein eigenständiges Verständnis der mathematischen Methoden nur durch die Anwendung möglich ist, stellen die rund 800 Übungsaufgaben einen zentralen Aspekt dieses Lehrbuchs dar.

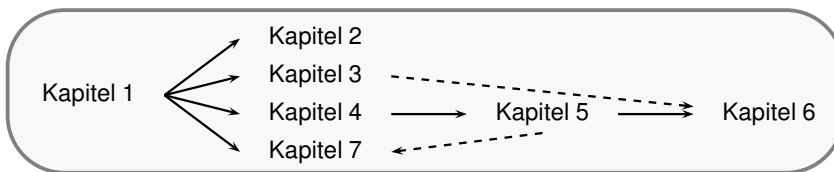
Gerade in den fortgeschrittenen Abschnitten verwenden wir vornehmlich Beispiele und Übungsaufgaben, die eher einfach zu berechnen sind. Wir glauben, dass Einsteiger so besser ein Verständnis des Stoffes erreichen können, als wenn sie durch unnötig schwierige Berechnungen den Überblick über den Kern der Argumentation verlieren. Insgesamt konzentrieren wir uns auf die für die Wirtschaftswissenschaften relevanten Themen. So ersetzen wir zum Beispiel die Theorie der Grenzwerte, die von vielen Studierenden als äußerst schwierig angesehen wird und die kaum direkte ökonomische Anwendungen hat, durch Plausibilitätsargumente. Trigonometrische Funktionen, mit denen der typische Studierende allenfalls einmal am Rande konfrontiert wird, wenn er einen fortgeschrittenen Kurs über Konjunkturtheorie besucht, werden gar nicht behandelt. Der Schwerpunkt des Buches liegt nicht auf einer mathematisch exakten Darstellung nach dem Muster *Annahmen – Satz – Beweis*, sondern auf einer Vermittlung der für die wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen zentralen Methoden (ohne dabei übermäßig zu vereinfachen).

Für viele Studierende liegt die Schulmathematik aufgrund einer Ausbildung oder Berufstätigkeit bereits mehrere Jahre zurück. Dieses Lehrbuch enthält daher relativ viel Schulmathematik und beginnt mit einem Grundlagen-Kapitel, mit dem die grundlegenden schulischen Rechentechniken wiederholt und eingeübt werden können. Entsprechend vorgebildete Studierende können dieses Kapitel auch gerne überspringen oder nur Teilbereiche nacharbeiten.

Wir sind der Meinung, dass es trotz einer teils vereinfachten Darstellung sinnvoll und möglich ist, die zentralen mathematischen Methoden für Wirtschaftswissenschaftler abzudecken.

Das Buch enthält einige mit einem Stern gekennzeichnete Abschnitte, die fortgeschrittenere Themen behandeln, und ein Ergänzungskapitel, in dem Bereiche wie die Integralrechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung kurz dargestellt werden, die zwar in Einführungsvorlesungen oft nicht oder erst später im Rahmen der Statistik behandelt werden, aber trotzdem für Studierende höherer Semester wichtig sind. Schließlich geben wir Ausblicke auf eine fortgeschrittene Darstellung in kleingedruckten Anmerkungen. Am Ende jedes Kapitels finden sich einige wenige, kommentierte Literaturhinweise, die denjenigen Lesern, die sich weitergehend mit mathematischen Methoden beschäftigen möchten, Anregungen geben. Die zitierte Literatur ist dabei so ausgewählt, dass sie mit dem Vorwissen aus dem vorliegenden Buch zu bewältigen ist. Sie stellt nur eine kleine, subjektive Auswahl ohne jegliche Wertung in Bezug auf nicht zitierte Literatur dar, weil wir es nicht für sinnvoll halten, Einsteiger mit zu vielen Hinweisen zu konfrontieren.

Die folgende Übersicht zeigt, dass die einzelnen Kapitel weitgehend unabhängig voneinander gelesen werden können. Das Kapitel 1 enthält grundlegende Rechentechniken. Lediglich die Kapitel 4, 5 und 6 (Funktionen einer und mehrerer Variablen) bauen naturgemäß aufeinander auf. Bei den Funktionen mehrerer Variablen wird an einigen Stellen die lineare Algebra aus dem Kapitel 3 benötigt, der Abschnitt über die Integralrechnung im Ergänzungskapitel 7 setzt die Kenntnis der Differentialrechnung aus dem Kapitel 5 voraus.



Unsere Kollegen Torsten Finke, Matthias Gehrke, Gerd von Harten, Bianca Krol, Karsten Lübke, Nils Mahnke, Eva Schwarzenberg und Klemens Waldhör haben Teile des Buches gelesen und uns wertvolle Hinweise zur Verbesserung gegeben. Die Leiter der Module mit mathematischen Inhalten an der FOM Hochschule, Torsten Finke, Matthias Gehrke und Michael Göke, haben uns bei der Abstimmung des Stoffes auf die Lehrinhalte an der FOM Hochschule unterstützt. Ihnen allen gilt unser herzlicher Dank. Wären wir allen Hinweisen gefolgt, hätten wir sicher ein zu umfangreiches Lehrbuch geschrieben. Schließlich möchten wir dem Prorektor für Forschung der FOM Hochschule, Thomas Heupel, und dem Springer Gabler-Verlag für die Aufnahme des Buches in die Reihe FOM-Edition danken.

Trotz aller Sorgfalt sind wir nicht so vermessen zu glauben, dass das Buch aus dem Stand heraus fehlerfrei ist. Wir bitten daher jeden, der (auch kleinere) Fehler, Unklarheiten oder andere Unzulänglichkeiten findet, sie uns mitzuteilen (lehrbuch.mathematik@fom.de).

Inhalt

Symbole	XI
1 Grundlagen	1
1.1 Zahlenmengen, Intervalle und Symbole	1
1.2 Grundrechenarten und Klammern	3
1.3 Bruchrechnung	5
1.4 Potenzrechnung, Wurzeln und Logarithmen	9
1.5 Gleichungen und Ungleichungen	13
1.6 Prozentrechnung	22
1.7 Summenzeichen	24
1.8* Stellenwertsysteme	27
Literaturhinweise	30
2 Finanzmathematik	31
2.1 Ganzjährige Zins- und Zinseszinsrechnung	31
2.2 Unterjährige Zins- und Zinseszinsrechnung	34
2.2.1 Unterjährige Zinsrechnung	34
2.2.2 Gemischte Verzinsung und nichtganzzahlige Exponenten	37
2.2.3 Unterjähriger Zinseszins und Effektivzins	41
2.3 Äquivalenzprinzip	48
2.4 Rentenrechnung	54
2.4.1 End- und Barwerte periodischer Zahlungen	54
2.4.2 Tilgungsrechnung	64
2.4.3 Festverzinsliche Wertpapiere	74
Literaturhinweise	76
3 Lineare Algebra	77
3.1 Lineare Gleichungssysteme	77
3.2 Matrizen	87
3.2.1 Matrixalgebra	87
3.2.2* Rang einer Matrix	96
3.2.3* Determinanten	99
3.3 Lineare Produktionsmodelle	103
3.3.1 Lineare Produktionsprozesse	103
3.3.2 Leontief-Modell	109
3.3.3 Lineare Produktionsprozesse und Leontief-Modell	114
3.4 Lineare Optimierung	117
Literaturhinweise	122
4 Funktionen einer Variablen	123
4.1 Grundbegriffe	123
4.2 Eigenschaften von Funktionen	128
4.3 Wichtige Funktionstypen	137
4.3.1 Lineare Funktionen	137
4.3.2 Polynome	143
4.3.3 Gebrochen rationale Funktionen	152
4.3.4 Potenzfunktionen	155
4.3.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen	157
Literaturhinweise	164

5	Differentialrechnung	165
5.1	Differentialquotient und Ableitung	165
5.1.1	Ableitung von Funktionen	165
5.1.2*	Tangentengleichung und Differentiale	170
5.1.3	Wichtige Ableitungsregeln	174
5.2	Kurvendiskussion	183
5.3	Ökonomische Anwendungen	192
5.4	Ein ausführlicherer Blick auf Extremwerte	208
	Literaturhinweise	218
6	Funktionen mehrerer Variablen	219
6.1	Grundlegende Darstellungsformen	219
6.1.1	Horizontalschnitte	219
6.1.2	Vertikalschnitte	227
6.2	Differentialrechnung	229
6.3	Implizite Funktionen	240
6.3.1	Eine abhängige Variable	240
6.3.2*	Mehrere abhängige Variablen	244
6.4*	Homogenität und Konkavität	248
6.4.1*	Homogenität	248
6.4.2*	Konkavität und Konvexität	250
6.5	Optimierungsprobleme	253
6.5.1	Optimierung ohne Nebenbedingungen	253
6.5.2	Optimierung mit Nebenbedingungen	258
6.5.3*	Umhüllendensätze	266
6.5.4*	Hinreichende Bedingungen und Verallgemeinerungen	270
6.6	Ökonomische Anwendungen	276
6.6.1	Gewinnmaximierung	276
6.6.2*	Produktionsfunktion	281
	Literaturhinweise	284
7	Ergänzungen im Überblick	285
7.1	Logik	285
7.1.1	Aussagenlogik	285
7.1.2	Prädikatenlogik	294
7.1.3	Mathematische Beweistechniken	297
7.2	Mengen	300
7.3	Iterative Nullstellenbestimmung	306
7.4	Integralrechnung	310
7.4.1	Unbestimmtes Integral	310
7.4.2	Bestimmtes Integral	314
7.4.3	Differentialgleichungen	321
7.5	Wahrscheinlichkeitsrechnung	324
7.5.1	Grundlagen	324
7.5.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	330
7.5.3	Kombinatorik	337
7.5.4	Zufallsvariablen	342
7.6	Software	355
	Literaturhinweise	356
	Literatur	357
	Index	359

Symbole

Allgemeine Hinweise

Diese Liste enthält nur die häufig verwendeten Symbole. In der Mengenlehre werden Großbuchstaben generell für Mengen, Kleinbuchstaben für Elemente verwendet. Analoges gilt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Ereignisse und Ergebnisse sowie in der Matrizenrechnung für Matrizen und Vektoren. Funktionen werden allgemein als $y = f(x)$ geschrieben, in Anwendungen jedoch mit aussagekräftigeren Symbolen. In einer Nachfragefunktion steht etwa x für die Menge und p für den Preis. Statt $x = f(p)$ schreiben wir dann $x = x(p)$.

Vergleichssymbole

$=$	gleich	\geq	größer oder gleich
\approx	ungefähr gleich	$<$	kleiner
\neq	ungleich	\leq	kleiner oder gleich
$>$	größer		

Häufig verwendete griechische Buchstaben

α	alpha	π	pi
β	beta	Π	Pi
γ	gamma	ρ	rho
δ	delta	σ	sigma
Δ	Delta	Σ	Sigma
ϵ, ε	epsilon	ϕ	phi
η	eta	Φ	Phi
λ	lambda	ω	omega
μ	mü	Ω	Omega
ν	nü		

Mengen und Logik

(a, b)	offenes Intervall von a bis b	\cup	Vereinigungsmenge
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall	\setminus	Differenz von Mengen
$(a, b]$	halboffenes Intervall	\bar{A}	Komplement der Menge A
$[a, b)$	halboffenes Intervall	\emptyset	leere Menge
$\{a, b\}$	Menge mit den Elementen a und b	\in	Element von
N	Menge der natürlichen Zahlen	\wedge	logisches „und“
N_0	natürliche Zahlen einschließlich 0	\vee	logisches „oder“
R	Menge der reellen Zahlen	\bar{p}	Negation von p
R^2	reelle Zahlenebene	\rightarrow	Konditional
Z	Menge der ganzen Zahlen	\leftrightarrow	Bikonditional
C	Teilmenge	\Rightarrow	Implikation
\cap	Schnittmenge	\Leftrightarrow	Äquivalenz
		\forall	für alle
		\exists	es gibt

Finanzmathematik

A	Annuität	$q = 1 + i$	Aufzinsungsfaktor
i	Zinssatz	r	nachschüssige Rentenrate
i_{nom}	Nominalzinssatz	r'	vorschüssige Rentenrate
i_{eff}	Effektivzinssatz	R_0, R_n	Bar- und Endwert
i'	konformer Periodenzinssatz		nachschüssige Rente
K_0	Startkapital	R'_0, R'_n	Bar- und Endwert
K_t	Kapital zum Zeitpunkt t		vorschüssige Rente
K_n	Endkapital	S	Kreditbetrag
n	Laufzeit	Z	Zinsen

Lineare Algebra

A	Matrix	x	Spaltenvektor
A^T	transponierte Matrix	x^T	Zeilenvektor
A^{-1}	inverse Matrix	$x^T y$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\det(A)$	Determinante der Matrix A		
$ A $	Determinante der Matrix A	$x \cdot y$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\text{Rg}(A)$	Rang der Matrix A	Σ	Summenzeichen
E	Einheitsmatrix		

Funktionen

D	Definitionsbereich	$\Delta y, \Delta x$	Änderungen
e	$= 2,71828 \dots$ Eulersche Zahl	$f(x_1, x_2)$	Funktion f von x_1 und x_2
\lim	Grenzwert	$f_{x_1}(x_1, x_2)$	partielle Ableitung nach x_1
\ln	natürlicher Logarithmus	$\frac{\partial y}{\partial x_1}$	partielle Ableitung nach x_1
$f(x)$	Funktion f von x	dy, dx_1, dx_2	Differentiale
$f'(x)$	erste Ableitung	\int	Integral
$\frac{dy}{dx}$	erste Ableitung	η, ϵ	Elastizität
dy, dx	Differentiale	∞	unendlich

Wahrscheinlichkeitsrechnung

A	Ereignis	$E(X)$	Erwartungswert von X
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit von A	$\mu(X)$	Erwartungswert von X
$P(A B)$	bedingte Wahrscheinlichkeit	$\text{Var}(X)$	Varianz von X
$n!$	Fakultät	$\sigma^2(X)$	Varianz von X
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient	$X \sim B(n; p)$	X ist binomialverteilt
X	Zufallsvariable	$X \sim N(0; 1)$	X ist standardnormalverteilt
$P(X \leq x)$	Wahrscheinlichkeit, dass X kleiner oder gleich x ist	$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung