
essentials

essentials liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art“ in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Expertenwissen von Springer-Fachautoren kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials*: Wissensbausteine aus den Wirtschafts, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autoren aller Springer-Verlagsmarken.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/13088>

Heinz Klaus Strick

Gesetzmäßigkeiten des Zufalls

Stochastik kompakt

 Springer Spektrum

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISSN 2197-6708

ISSN 2197-6716 (electronic)

essentials

ISBN 978-3-658-25464-3

ISBN 978-3-658-25465-0 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-25465-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Was Sie in diesem *essential* finden können

- Gesichtspunkte, nach denen man den Ablauf und das Gesamtergebnis eines Zufallsversuchs untersuchen kann
- Kriterien für die „Zufälligkeit“ von Versuchsabläufen und Versuchsergebnissen
- Faustregeln zu den Kriterien
- Beispiele zu allen behandelten Themen

*Zu viel der Ehre für das Roulette: Es hat
weder Gewissen noch Gedächtnis.*
(Joseph Louis François Bertrand,
französischer Mathematiker, 1822–1900)

Vorwort

In seinem berühmten Buch *Calcul des probabilités* aus dem Jahr 1888 setzte sich Joseph Bertrand mit dem Irrtum von Roulette-Spielern auseinander, die aus dem Bernoulli'schen *Gesetz der großen Zahlen* die Gewissheit ablesen, dass es bei einem „Übergewicht“ von *schwarz* gegenüber *rot* bald zu einem „Ausgleich“ kommen *muss*. Manche der irrenden Roulette-Spieler gehen in ihrer Argumentation sogar so weit, dass sie sagen, dass das Roulette einen solchen Ausgleich „schuldig“ ist.

Sein Kommentar *Zu viel der Ehre für das Roulette – es hat weder ein Gewissen noch ein Gedächtnis* wurde zum geflügelten Wort für Zufallsvorgänge.

Es mag sein, dass der Zufall kein Gedächtnis hat, aber es gibt (trotzdem) Gesetzmäßigkeiten des Zufalls.

Im Unterschied etwa zu den präzisen Regeln der Algebra sind die meisten dieser Gesetzmäßigkeiten als Wahrscheinlichkeitsaussagen formuliert – und das irritiert viele Menschen, wenn sie sich zum ersten Mal mit solchen Vorgängen beschäftigen.

Im *essential*-Heft *Stochastik kompakt – Einführung in die Beurteilende Statistik* wurden verschiedene Faustregeln vorgestellt, mithilfe derer man überprüfen kann, ob ein gegebenes Stichprobenergebnis eines Zufallsversuchs als „ungewöhnlich“ oder als „signifikant abweichend von einem erwarteten Wert“ bzw. „... von den zu erwartenden Werten“ zu bezeichnen ist.

Die in diesem zweiten Heft von *Stochastik kompakt* vorgestellten Methoden (Binomialtest und Chiquadrat-Anpassungstest) beziehen sich beide auf die *Häufigkeiten*, mit denen einzelne Ergebnisse in einem Zufallsversuch aufzutreten sind.

Diese beiden Methoden werden zu Beginn des vorliegenden Hefts noch einmal kurz vorgestellt; danach folgt die Beschreibung weiterer Verfahren, die zur Überprüfung von Stichprobenergebnissen eingesetzt werden können.

Dazu werden verschiedene Aspekte vorgestellt, unter denen man den Ablauf von Zufallsversuchen bzw. die Zusammensetzung aufeinanderfolgender Versuchsergebnisse auswerten kann:

- Besteht eine Abhängigkeit zwischen den Ergebnissen von aufeinanderfolgenden Versuchsdurchführungen? (Reihentest)
- Ergeben sich besondere „Bilder“, wenn man mehrere Versuchsergebnisse zu Ereignissen zusammenfasst und diese insgesamt untersucht? (Maximumtest, Poker-Test)
- Wie oft treten bei einer Versuchsreihe Wechsel zwischen zwei möglichen Ergebnissen auf, wie lang können „Serien“ von lauter gleichen Ergebnissen sein? (Runtest)
- Wie lange dauert es, bis sich *ein bestimmtes* Versuchsergebnis wiederholt? (Intervalltest)
- Wie lange dauert es, bis *jedes* der möglichen Versuchsergebnisse mindestens einmal aufgetreten ist? (Sammelbilder-Test)
- Wie lange dauert es, bis *irgendeines* der Versuchsergebnisse zum zweiten Mal auftritt? (Kollisionstest)
- Wie sind die Ergebnisse angeordnet? (Permutationstest)

Die verschiedenen Methoden werden anhand einfach strukturierter Beispiele verdeutlicht. Wie bereits in *Stochastik kompakt – Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung* dargestellt, gilt auch in diesem Heft: An einfachen Glücksspielen (wie beispielsweise Münzwurf, Würfeln, Roulette oder Lotto) lassen sich Zusammenhänge leichter verstehen und nachvollziehen; deshalb werden insbesondere solche Beispiele zur Erläuterung herangezogen.

Einige der Gesetzmäßigkeiten des Zufalls wirken paradox. Dass sie paradox wirken, hat etwas mit den Fehlvorstellungen über Zufallsprozesse zu tun, ähnlich wie bei den oben beschriebenen falschen Vorstellungen bzgl. des *Gesetzes der großen Zahlen*: Bei Zufallsversuchen muss es keinen schnellen Ausgleich zwischen den Häufigkeiten gleichwahrscheinlicher Ergebnisse geben.

Es gilt aber auch: Bei Zufallsversuchen wiederholen sich Ergebnisse schneller als vermutet; daher kommt es schneller zu Wiederholungen, als es „dem Gefühl nach“ erwartet wird, und es dauert länger, als man vielleicht denkt, bis jedes mögliche Ergebnis mindestens einmal aufgetreten ist.

Die in diesem Heft beschriebenen Testverfahren können dazu beitragen, bessere Vorstellungen über Zufallsvorgänge zu erhalten. Gleichzeitig machen sie deutlich, wie schwierig es ist, sich eine Abfolge von Ergebnissen „auszudenken“, die „zufällig“ aussehen sollen (beispielsweise beim „Würfeln im Kopf“).

Einleitung

Zu den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls gehören im Prinzip alle Regeln, mit deren Hilfe Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen berechnet werden können. Mit den so bestimmten Zahlenwerten hat man die Möglichkeit, Chancen für das Eintreten der betreffenden Ereignisse in zukünftigen Zufallsversuchen abzuschätzen – absolute Sicherheiten gewinnt man hierdurch allerdings nicht.

In (fast) allen Fällen muss man den Vorbehalt machen, dass (unter Berücksichtigung der Rahmenbedingungen) im Prinzip „alles möglich“ ist.

In *Stochastik kompakt – Einführung in die Beurteilende Statistik* wurde am Beispiel der Binomialverteilung die Grundidee des Testens von Hypothesen beschrieben, abschließend wurde erläutert, wie diese Idee zum χ^2 -Anpassungstest verallgemeinert werden kann.

Über die grundlegende Strategie des Binomialtests hinaus, bei dem ausschließlich *Häufigkeiten* von Ergebnissen bewertet werden, gibt es weitere Aspekte, den Ablauf und die Ergebnisse von Zufallsversuchen zu beurteilen. Einige der zugrunde liegenden Ideen dieser Testverfahren werden im Folgenden angesprochen.

Zum Einstieg betrachten wir noch einmal die beiden Häufigkeitstests, die im zweiten Heft von *Stochastik kompakt* ausführlich dargestellt wurden.

Inhaltsverzeichnis

1 Häufigkeitstests	1
2 Reihentest	5
3 Maximumtest	9
4 Pokertest	13
5 Runtest	17
6 Intervalltest	23
7 Kollisionstest	29
8 Sammelbilder-Test	37
9 Permutationstest	43
Literatur	49