
essentials

essentials liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art“ in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Expertenwissen von Springer-Fachautoren kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials*: Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autoren aller Springer-Verlagsmarken.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/13088>

Stefan Schäffler

Die Kunst des Zählens

Eine Einführung in die Kombinatorik

 **Springer** Spektrum

Stefan Schäffler
Lehrstuhl für Mathematik und
Operations Research
Universität der Bundeswehr München
Neubiberg, Deutschland

ISSN 2197-6708
essentials

ISSN 2197-6716 (electronic)

ISBN 978-3-658-24695-2

ISBN 978-3-658-24696-9 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-24696-9>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Was Sie in diesem *essential* finden können

- Zählen von Teilmengen und Partitionen
- Stirlingzahlen erster und zweiter Art
- Approximation von Summen
- Zählen von Mustern
- Erzeugende Funktionen

*für
Dr. Rainer von Chossy
auf dessen enzyklopädisches Wissen ich
seit fast zwei Jahrzehnten zugreifen darf*

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
2 Teilmengen	7
3 Summen	19
4 Muster	23
Literatur	35

Symbolverzeichnis

$A^{(\downarrow)}$	Multimenge
B_i	Bernoullizahl
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient
$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$	Stirlingzahl zweiter Art
S_n	Symmetrische Gruppe
π_n	Permutation
$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$	Stirlingzahl erster Art

Einleitung

Es gibt drei Arten von
Mathematikern, die einen können
zählen, die anderen nicht.

UNBEKANNT

Der erste Kontakt mit der Kombinatorik – also der Mathematik des Zählens – findet üblicherweise im Gymnasium im Rahmen des Stochastik-Unterrichts statt und in der Tat ist die Kombinatorik die Basis der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie (siehe [BaHr17]). Man erinnert sich an – bisweilen ungenau formulierte – Textaufgaben, bei denen die Schüler versuchen, die typischen Fragen „spielt die Reihenfolge eine Rolle oder nicht“, „unterscheidbar oder nicht“ bzw. „mit oder ohne Zurücklegen“ zu beantworten. Selbst viele, die sich später beruflich mit Mathematik beschäftigen, sind oft froh, damit nichts mehr zu tun zu haben.

Auf der anderen Seite ist die Kombinatorik ein hoch interessantes, methodisch sehr attraktives und für viele Anwendungen relevantes Teilgebiet der Mathematik, zum Beispiel in der Codierungstheorie, in der Kryptologie oder in der Chemie etwa bei der Frage, wie viele Alkohole es mit n C-Atomen gibt (Abzählen verschiedener Muster, siehe Kapitel vier und [Ai06]).

Dieser Text dient daher dazu, Interesse an der Kombinatorik zu wecken und den Leser zu überzeugen, eines der hervorragenden Standardwerke auf diesem Gebiet (etwa [Ti14] oder [MaTo11]) in die Hand zu nehmen. Speziell für Lehrer sei noch [ReSt11] empfohlen.

Das erste Kapitel ist den Grundlagen gewidmet und führt wichtige Begriffe wie (geordnete) Menge, Teilmenge, Multimenge, Partition und Permutation ein. Im zweiten Kapitel werden Methoden zum Zählen von geordneten und nicht geordneten Teilmengen sowie von Partitionen vorgestellt; dabei wird insbesondere Wert auf die Verwendung erzeugender Funktionen gelegt. Als eine Anwendung wird die

Frage untersucht, wie viele verschiedene Wörter mit einer vorgegebenen Anzahl von Buchstaben man mit einem gegebenen Zeichenvorrat bilden kann. Im dritten Kapitel wird die Euler-Maclaurinsche Summenformel hergeleitet, die in der Kombinatorik nicht zur Approximation von Integralen durch die Trapezregel dient, sondern die zur Approximation von Summen durch Verwendung der Integrationstheorie verwendet wird. Das letzte Kapitel betrachtet das Zählen verschiedener Muster. Da diese Fragestellung wichtige Ergebnisse der Algebra wie den Satz von Burnside benötigt, wird nur ein Beispiel ausführlich vorgestellt; durch dieses Beispiel kann aber die prinzipielle Vorgehensweise direkt verstanden werden.

Herr DR. RAINER VON CHOSSY hat auch diesen Text kritisch durchgearbeitet und mir dadurch sehr geholfen. Einmal mehr bin ich ihm zu großem Dank verpflichtet.