essentials

essentials liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art" in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Expertenwissen von Springer-Fachautoren kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials:* Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autoren aller Springer-Verlagsmarken.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/13088

Stefan Schäffler

Verallgemeinerte Funktionen

Grundlagen und Anwendungsbeispiele

Springer Spektrum

Stefan Schäffler
Lehrstuhl für Mathematik und
Operations Research
Universität der Bundeswehr München
Neubiberg, Deutschland

ISSN 2197-6708 ISSN 2197-6716 (electronic)
essentials
ISBN 978-3-658-23856-8 ISBN 978-3-658-23857-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23857-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Was Sie in diesem *essential* finden können

- Was sind verallgemeinerte Funktionen?
- Welche wichtigen Eigenschaften haben sie?
- Warum ist es wichtig, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern?
- Wo werden verallgemeinerte Funktionen angewendet?

für meinen Lehrer
Prof. Dr. Klaus Ritter (1936–2017)
in dankbarer Erinnerung

Einleitung

> There is nothing so practical as a good theory.
> KURT LEWIN

Verallgemeinerte Funktionen spielen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle. Bei der Modellierung physikalischer Sachverhalte durch Differentialgleichungen ist es zum Beispiel häufig notwendig, den Ableitungsbegriff der klassischen Analysis zu verallgemeinern, um eine größere Klasse von Phänomenen modellieren zu können. Vor allem in Kombination mit der Stochastik sind verallgemeinerte Funktionen im Rahmen der Modellierung technischer Rauschprozesse enorm wichtig. Daher sollen in dieser knappen Einführung neben den theoretischen Grundlagen auch Anwendungen zur Sprache kommen.

Nach zwei typischen Anwendungen verallgemeinerter Funktionen (Kap. 1) wird im zweiten Kapitel die Theorie entwickelt. Dabei werden nur die fundamentalen Ideen vorgestellt; tiefere theoretische Betrachtungen (zum Beispiel die temperierten Distributionen und in Verbindung damit die Fourier-Transformation sowie Sobolev-Räume) sind im Rahmen dieses Textes nicht möglich; dies hat auf der anderen Seite den Vorteil, dass die erforderlichen mathematischen Grundkenntnisse so gering wie möglich gehalten werden konnten (zum Beispiel im Rahmen der Integrationstheorie nur das Riemann-Integral und keine funktionalanalytischen Kenntnisse). Für ein tieferes Studium der Theorie sei auf [DuiKol10], [GelSch6064], [Wal94] und [Zem87] verwiesen. Im dritten Kapitel werden drei Anwendungen betrachtet; dabei werden zunächst LTI-Systeme systemtheoretisch untersucht. Hier wird sich die überragende Bedeutung der Dirac-Distribution zeigen (siehe dazu auch [OhmLue14]). Der zweite Teil des Kapitels behandelt die Verwendung schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen am Beispiel einer ungedämpften gezupften schwingenden Saite. Der dritte und letzte Teil des dritten Kapitels ist der Modellierung technischer

Rauschprozesse am Beispiel des kontinuierlichen weißen Rauschens gewidmet (siehe dazu [Schae17]).

Der vorliegende Text basiert auf dem ersten Kapitel von [Schae17]. Herrn Dr. Rainer von Chossy bin ich für die kritische Durchsicht des Manuskripts zu großem Dank verpflichtet.

Inhaltsverzeichnis

Symbole

$\| \bullet \|_2$	Euklidische Norm
$\mathrm{cl}(M)$	Abschluss von M
$\mathrm{int}(M)$	Innere von M
$\partial(M)$	Rand von M
$C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\mathrm{supp}(f)$	Träger von f
$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	Vektorraum der Grundfunktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	Dualraum von $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
$\mathrm{CH}\left(\int\limits_A f(x)dx\right)$	Cauchyscher Hauptwert
u_x	partielle Ableitung von u nach x
AWGN	**A**dditive **W**hite **G**aussian **N**oise
LTI-System	**L**inear **T**ime **I**nvariant System