

---

**essentials**

*essentials* liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art“ in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Expertenwissen von Springer-Fachautoren kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials*: Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autoren aller Springer-Verlagsmarken.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/13088>

---

Stefan Schäffler

# Verallgemeinerte Funktionen

Grundlagen und Anwendungsbeispiele

 Springer Spektrum

Stefan Schäffler  
Lehrstuhl für Mathematik und  
Operations Research  
Universität der Bundeswehr München  
Neubiberg, Deutschland

ISSN 2197-6708  
essentials

ISSN 2197-6716 (electronic)

ISBN 978-3-658-23856-8

ISBN 978-3-658-23857-5 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-23857-5>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

---

## Was Sie in diesem *essential* finden können

- Was sind verallgemeinerte Funktionen?
- Welche wichtigen Eigenschaften haben sie?
- Warum ist es wichtig, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern?
- Wo werden verallgemeinerte Funktionen angewendet?

*für meinen Lehrer  
Prof. Dr. Klaus Ritter (1936–2017)  
in dankbarer Erinnerung*

---

# Einleitung

There is nothing so practical as a good theory.

KURT LEWIN

Verallgemeinerte Funktionen spielen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle. Bei der Modellierung physikalischer Sachverhalte durch Differentialgleichungen ist es zum Beispiel häufig notwendig, den Ableitungsbegriff der klassischen Analysis zu verallgemeinern, um eine größere Klasse von Phänomenen modellieren zu können. Vor allem in Kombination mit der Stochastik sind verallgemeinerte Funktionen im Rahmen der Modellierung technischer Rauschprozesse enorm wichtig. Daher sollen in dieser knappen Einführung neben den theoretischen Grundlagen auch Anwendungen zur Sprache kommen.

Nach zwei typischen Anwendungen verallgemeinerter Funktionen (Kap. 1) wird im zweiten Kapitel die Theorie entwickelt. Dabei werden nur die fundamentalen Ideen vorgestellt; tiefere theoretische Betrachtungen (zum Beispiel die temperierten Distributionen und in Verbindung damit die Fourier-Transformation sowie Sobolev-Räume) sind im Rahmen dieses Textes nicht möglich; dies hat auf der anderen Seite den Vorteil, dass die erforderlichen mathematischen Grundkenntnisse so gering wie möglich gehalten werden konnten (zum Beispiel im Rahmen der Integrationstheorie nur das Riemann-Integral und keine funktionalanalytischen Kenntnisse). Für ein tieferes Studium der Theorie sei auf [DuiKol10], [GelSch6064], [Wal94] und [Zem87] verwiesen. Im dritten Kapitel werden drei Anwendungen betrachtet; dabei werden zunächst LTI-Systeme systemtheoretisch untersucht. Hier wird sich die überragende Bedeutung der Dirac-Distribution zeigen (siehe dazu auch [OhmLue14]). Der zweite Teil des Kapitels behandelt die Verwendung schwacher Lösungen partieller Differentialgleichungen am Beispiel einer ungedämpften gezupften schwingenden Saite. Der dritte und letzte Teil des dritten Kapitels ist der Modellierung technischer

Rauschprozesse am Beispiel des kontinuierlichen weißen Rauschens gewidmet (siehe dazu [Schae17]).

Der vorliegende Text basiert auf dem ersten Kapitel von [Schae17]. Herrn Dr. Rainer von Chossy bin ich für die kritische Durchsicht des Manuskripts zu großem Dank verpflichtet.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Motivation</b> .....	1
1.1 Signalübertragung .....	1
1.2 Schwingende Saite .....	3
<b>2 Theorie</b> .....	5
2.1 Grundlagen .....	5
2.2 Darstellung von Funktionen durch Funktionale .....	13
2.3 Distributionen .....	17
<b>3 Anwendungen</b> .....	27
3.1 LTI-Systeme .....	27
3.2 Schwache Lösungen .....	32
3.3 Rauschprozesse .....	37
<b>Literatur</b> .....	41

---

# Symbole

$\  \bullet \ _2$	Euklidische Norm
$\text{cl}(M)$	Abschluss von $M$
$\text{int}(M)$	Innere von $M$
$\partial(M)$	Rand von $M$
$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$\text{supp}(f)$	Träger von $f$
$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	Vektorraum der Grundfunktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	Dualraum von $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
$\text{CH} \left( \int_A f(x) dx \right)$	Cauchyscher Hauptwert
$u_x$	partielle Ableitung von $u$ nach $x$
AWGN	<b>A</b> dditive <b>W</b> hite <b>G</b> aussian <b>N</b> oise
LTI-System	<b>L</b> inear <b>T</b> ime <b>I</b> nvariant <b>S</b> ystem