Lehrbuch der Algebra

Gerd Fischer

Lehrbuch der Algebra

Mit lebendigen Beispielen, ausführlichen Erläuterungen und zahlreichen Bildern

4., wesentlich überarbeitete und erweiterte Auflage

Unter Mitarbeit von Matthias Lehner, Florian Quiring und Reinhard Sacher

Springer Spektrum

Gerd Fischer
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
Garching, Deutschland

ISBN 978-3-658-19365-2 (Hardcopy) ISBN 978-3-658-19218-1 (eBook)
ISBN 978-3-658-19217-4 (Softcopy)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-19218-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch
Abbildungen: Avril Bader, Matthias Lehner und Brigitte Singhof

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Dem Andenken
an meinen Lehrer
REINHOLD REMMERT
gewidmet

Vorwort zur vierten Auflage

Für die neue Auflage wurde der gesamte Text gründlich überarbeitet. Vor allem habe ich mannigfache Anregungen von Studierenden berücksichtigt, die sich weitergehende Motivationen, mehr Details in Begründungen, sowie zusätzliche Beispiele und Abbildungen gewünscht haben. Darüber hinaus ist die Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen mit Hilfe der Elementarteiler im Rahmen der Theorie zyklischer Gruppen völlig neu gestaltet worden. Auch das verbesserte Layout soll dabei helfen, die Lektüre zu vereinfachen und Neulinge im Land der Algebra leichter mit den zahlreichen Begriffen, Methoden und grundlegenden Ergebnissen vertraut zu machen. Ich hoffe sehr, dass sie dabei auch die Präzision, Klarheit und Schönheit dieses Gebäudes der Mathematik schätzen lernen.

Mein Dank gilt all denen, die mich bei der Überarbeitung mit Rat und Tat unterstützt haben, vor allem ANDREAS ALPERS, AVRIL BADER, GEORG OBERMEIER, GREGOR KEMPER, REINHOLD REMMERT, WILHELM SINGHOF sowie MATTHIAS LEHNER, der die Arbeit während der ganzen Zeit konstruktiv kritisch und stets hilfreich begleitet hat. Weiter danke ich KRISTINA REISS und der TUM School of Education für die personelle Unterstützung mit Hilfe der Telekom-Stiftung und ULRIKE SCHMICKLER-HIRZEBRUCH vom Springer Verlag für die Erfüllung all meiner Wünsche zur neuen Gestaltung des Buches.

Wie immer bin ich allen Leserinnen und Lesern für Hinweise dankbar: gfischer@ma.tum.de

München und Garching, im Juli 2017 Gerd Fischer

Vorwort zur ersten Auflage

Der vorliegende Text ist ein einführendes „*Lese- und Lernbuch*“ für Studierende, die sich nach dem Studium der Linearen Algebra erstmals mit grundlegenden Problemen, Methoden und Ergebnissen der „höheren“ Algebra vertraut machen möchten. Der Titel steht beim Vieweg-Verlag in einer alten Tradition: ab 1896 erschien das dreibändige Werk *Lehrbuch der Algebra* von H. WEBER, 1924 folgten zwei Bände mit dem gleichen Titel von R. FRICKE, aber mit einer

ganz anderen Intention. In den beiden klassischen Werken wurde versucht, möglichst umfassend den damaligen Stand der Algebra zu vermitteln.

Die Darstellung der Algebra hat sich seit WEBER und FRICKE stark verändert. Durch das Programm von HILBERT ist das axiomatische Gerüst ausgeprägt worden; die grundlegenden Vorlesungen in diesem Stil von EMIL ARTIN und EMMY NOETHER waren die Quellen für die 1930 erstmals veröffentlichte *Moderne Algebra* von VAN DER WAERDEN, sie haben alle seither erschienenen Bücher über Algebra geprägt. Durch die Axiomatik wird die Darstellung klarer, Beweise werden einfacher und durchsichtiger. Aber für Studierende besteht die Gefahr, die zahllosen hinter dem klaren Gerüst verborgenen konkreten Situationen nicht genügend kennen zu lernen. Dazu sei erinnert an die Arbeiten von C.F. GAUSS: Hier gab es keinen der abstrakten Begriffe wie Gruppe, Ring oder Körper; es wurden viele raffinierte Überlegungen und Berechnungen durchgeführt, deren Ergebnisse später elegante Formulierungen im abstrakten Rahmen gefunden haben.

In diesem Buch kann und soll die Zeit nicht zurückgedreht werden. Aber es wird versucht, durch sehr viele konkrete *Beispiele* die Bodenhaftung der Studierenden zu erhalten. In dieser Absicht beschreiben wir ausführlich die Symmetrien der *Platonischen Körper* als Illustration der Beziehungen zwischen Gruppen und Geometrie, *quadratische Zahlringe* zur Erläuterung der subtilen Teilbarkeitseigenschaften in Ringen und von GAUSS gefundene Formeln zur *Darstellung von Einheitswurzeln* aus der Sicht der Körpererweiterungen. In einer einführenden Vorlesung verbleibt kaum Zeit zur Behandlung all dieser Themen; die Studierenden erhalten die Möglichkeit, solche zur Vertiefung des Verständnisses wichtige Ergänzungen hier nachzulesen. Außerdem enthält dieser Text für ein Buch über Algebra ungewöhnlich viele Bilder. Dazu sei erinnert, dass die Algebra ein hervorragendes Werkzeug für die Geometrie ist, und dass vor der Entwicklung einer guten Symbolik für die „Buchstabenrechnung“ viele algebraische Beweise geometrisch geführt wurden.

Die zahlreichen Veränderungen der letzten Jahre in den Studiengängen haben sich mittlerweile etwas stabilisiert; dieses Buch versucht, darauf Rücksicht zu nehmen. Der gesamte Inhalt ist für eine zweisemestrige einführende Vorlesung ausgelegt, die nur Kenntnisse aus der Linearen Algebra voraussetzt und ab dem dritten Studiensemester besucht werden kann. In vielen Studiengängen ist nur eine einsemestrige Einführung in die Algebra vorgesehen. Daher sind einige Paragraphen und Abschnitte mit einem *Stern** versehen: man kann sie beim ersten Durchgang weglassen, und eventuell im zweiten Semester nachholen. Insbesondere ist dadurch ein Minimalkanon für den *Bachelor* vorgeschlagen. Ganz besonders Studierende für das *Lehramt* können durch geeignete Auswahl aus dem Inhalt eine solide und nicht zu abstrakte Grundlage für die spätere Tätigkeit erhalten und das Buch dann als Nachschlagewerk nutzen.

In dieser Einführung soll nur die relativ „klassische“ Algebra behandelt werden, Höhepunkte sind die Ergebnisse über die Lösbarkeit von Polynomgleichungen; dieser Teil der Algebra kam im 19. Jahrhundert - abgesehen von der Darstellung - zu einem Abschluss. Einen sehr guten Eindruck von dem langen Weg dorthin seit den Wurzeln in der Antike vermittelt der *historische Text* von VAN DER WAERDEN [W_2]. Die anschließende Entwicklung der Algebra im 20. Jahrhundert war rasant, vor allem in Richtung der algebraischen Geometrie und der Zahlentheorie; zwischen beiden wurden innige Zusammenhänge entdeckt, ein Höhepunkt war die Lösung des Problems von FERMAT im Jahr 1993. All das muss fortgeschrittenen Vorlesungen und weiter-

führenden Büchern vorbehalten bleiben; einen knappen historischen Abriss über das vergangene Jahrhundert findet man bei [Mi]. Wie überall in der Mathematik setzt das Studium der neueren Entwicklungen eine solide Kenntnis der klassischen Methoden voraus.

Die *Gliederung des Inhalts* folgt der üblichen Systematik „Gruppen, Ringe, Körper“, dadurch wird das logische Gerüst deutlich und die Darstellung vereinfacht. Zur Erhöhung der Motivation beim Lernen kann man getrost davon abweichen: Man kann ganz hinten anfangen mit den *geometrischen Konstruktionen* und die zunehmend komplexeren algebraischen Hilfsmittel nach Bedarf nachlesen. Wenn man mit dem Paragraphen über die *Lösungen von Polynomgleichungen* anfängt, wird man feststellen, dass die wesentlichen zuvor entwickelten Techniken über Gruppen, Ringe und Körper benötigt werden. In den zahlreichen Beispielen sind nicht immer alle Einzelheiten ausgeführt; da verbleiben viele kleinere und größere *Übungsaufgaben*.

An der Darstellung der grundlegenden Ergebnisse der Algebra ist von vielen Autoren gefeilt worden. Es gibt zahllose Tricks, deren Urheber kaum noch festzustellen sind; man kann sie schon als „Folklore“ bezeichnen. Im *Literaturverzeichnis* sind Bücher aufgeführt, aus denen ich gelernt habe, außerdem zahlreiche Texte für weiterführende Lektüre. Aus den Werken von C.F. GAUSS sind einige Stellen im Faksimile abgedruckt, in der Hoffnung, die Neugier des Lesers auf diese einmaligen Texte zu wecken.

Mein Dank gilt den Studierenden der TU-München für viele kritische Bemerkungen, und vor allem REINHARD SACHER, dem Coautor unseres gemeinsamen Buches „Einführung in die Algebra“ [F-S]; aus diesem alten Text ist vieles übernommen worden. Sowie FLORIAN QUIRING, der vier Semester lang Übungen zur Vorlesung betreut und viele wertvolle Details beigesteuert hat. BRIGITTE SINGHOF hat mit großer Präzision und persönlichem Einsatz die druckfertige TEX-Vorlage erstellt, Ulrike Schmickler-Hirzebruch hat das Projekt vom Verlag begleitet und vorangetrieben.

Trotz sorgfältiger Suche nach Druckfehlern und mathematischen Irrtümern werden wohl einige verblieben sein. Daher möchte ich alle Leser bitten, mir Fundstellen mitzuteilen, am einfachsten an

gfischer@ma.tum.de

Wir haben unter

http://www-m10.ma.tum.de/∼GerdFischer

eine Seite mit Kommentaren und Verbesserungen eingerichtet.

München, im November 2007 Gerd Fischer

Es ist der Fluch aller abstrakten Theorien,
dass sie sehr weit entwickelt werden müssen,
bis sie nützliche Ergebnisse bei konkreten Problemen liefern.
HERMANN WEYL

Inhaltsverzeichnis

Leitfaden

Die Algebra hat eine sehr lange Geschichte. Der Name ist von AL-HWARIZMI abgeleitet, der um 800 n. Chr. beim Kalifen von Bagdad tätig war, aber die Wurzeln der Algebra – das Rechnen mit Zahlen – reichen bis tief in die Frühzeit zurück. Bevor wir hier mit dem heute üblichen Standardprogramm **Gruppen-Ringe-Körper** beginnnen, soll anhand von einigen Jahrhundert-Problemen ein Vorgeschmack auf die Entwicklung algebraischer Methoden gegeben werden.

1. Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Die Quadratur des Kreises
Dieses uralte Problem der Geometrie konnte erst 1882 gelöst werden, nachdem LINDEMANN bewiesen hatte, *dass die Kreiszahl π transzendent ist*. Das bedeutet, dass es keine Relation der Form

$$\pi^n + a_{n-1}\pi^{n-1} + \ldots + a_1\pi + a_0 = 0$$

mit $n \geqslant 1$ und rationalen $a_0, \ldots, a_{n-1}$ gibt (vgl. dazu 3.1.4 und 3.6.4).

Die Konstruktion regelmäßiger n-Ecke
Für $n = 3, 4, 5, 6$ sind die Konstruktionen seit ewigen Zeiten bekannt; für $n = 7$ war die Frage bis 1796 offen gewesen. Da zeigte GAUSS (im Alter von 19 Jahren), dass eine solche Konstruktion unmöglich ist. In seinem 1801 veröffentlichten *Disquisitiones arithmeticae* gab er ein Kriterium mit Hilfe der EULERschen φ-Funktion (vgl. 1.3.14) an: *Das n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn $\varphi(n)$ eine Potenz von 2 ist* (vgl. dazu 3.6.5).

2. Lösungen von Polynomgleichungen

Für ein Polynom $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = 0$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ gilt der

Fundamentalsatz der Algebra *Es gibt $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ derart, dass*

$$f = (X - x_1) \cdot \ldots \cdot (X - x_n).$$

Ein strenger Beweis wurde von GAUSS in seiner Dissertation 1799 gegeben (vgl. 3.1.8 und 3.4.7). Der Fundamentalsatz liefert aber keine Methode zur Berechnung der Nullstellen x_i aus den Koeffizienten a_j. In der Praxis benutzt man dafür seit langer Zeit numerische Methoden zur

approximativen Berechnung, aber klassisch war man auf der Suche nach Formeln mit geschachtelten Wurzeln, denn Wurzeln waren numerisch relativ einfach zu berechnen. Für $n = 2$ ist

$$f = X^2 + pX + q \quad \text{und} \quad x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

Formeln dieser Art waren schon seit langer Zeit bekannt, erst 1525 und 1545 gelang es CARDANO und FERRARI [C] für $n = 3$ und 4 ähnliche, aber kompliziertere Formeln zu finden (vgl. 3.5.2 und 3.5.4). Alle Versuche das Problem für $n \geqslant 5$ zu lösen blieben erfolglos, bis ABEL [A] und GALOIS [G] in den Jahren 1826 und 1830 die ersten Beweise dafür fanden, dass es für $n \geqslant 5$ keine allgemein gültige Lösung geben kann.

3. Das FERMAT-Problem

Gesucht sind ganzzahlige Lösungen x, y, z einer Gleichung

$$x^n + y^n = z^n.$$

Für $n = 2$ gibt es unendlich viele ***pythagoreische Tripel*** (x, y, z): Für jede Primzahl $p \geqslant 3$ und $p^2 = 2k + 1$ ist $(p, k, k + 1)$ ein solches Tripel. Um 1670 glaubte FERMAT einen Beweis dafür zu haben, dass es für $n \geqslant 3$ keine Lösung gibt. Nach unzähligen Versuchen gelang es schließlich A. WILES im Jahr 1994 ein sehr komplizierter Beweis.

4. Das GOLDBACH-Problem

Im Jahr 1742 äußerte GOLDBACH in einem Brief an EULER die folgenden Vermutungen:

Starke Form: *Jede gerade Zahl $n \geqslant 6$ ist Summe von zwei ungeraden Primzahlen.*

Schwache Form: *Jede ungerade Zahl $n \geqslant 9$ ist Summe von drei ungeraden Primzahlen.*

Man kann sich leicht überlegen, dass die schwache Form aus der starken Form folgt. Weiter findet man durch einfache Rechnung für kleine n, dass es im allgemeinen mehrere solche Summandendarstellungen gibt. Erst im Jahr 2013 gelang es HELFGOTT die letzten Lücken im Beweis der schwachen Form zu schließen; die starke Form ist weiter offen.

5. Beweismethoden

Wie die Beispiele zeigen, hat es Jahrhunderte gedauert, bis relativ einfach zu formulierende Probleme gelöst werden konnten. Im folgenden soll versucht werden, das zu erklären.

Die GOLDBACH-Vermutung ist in unserer Liste insofern eine Ausnahme, als hier bewiesen werden soll, dass etwas geht. Die Tücke dabei ist, dass es bislang keine Methode gibt, für beliebig große n Summendarstellungen berechnen zu können. Als Ersatz werden für die schwache Form höchst komplizierte Hilfsmittel aus der Analysis, insbesondere der Verteilung von Primzahlen benutzt.

Bei den anderen Problemen muss gezeigt werden, dass etwas unmöglich ist. Dazu ist es nötig, irgendein nicht zu umgehendes Hindernis zu finden. Das liegt in den drei anderen Beispielen in

einem passenden mehr oder weniger abstrakten theoretischen Rahmen. Besonders ausgeprägt ist das beim FERMAT-Problem. Hier benötigt man höchst diffizile im 20. Jahrhundert entwickelte Hilfsmittel der Algebraischen Geometrie, um aus der Annahme der Existenz einer Lösung einen Widerspruch zu produzieren. Das ist nur einem sehr kleinen Kreis von Experten zugänglich.

Einfacher ist die Situation bei den Problemen 1 und 2, hier kann der nötige theoretische Rahmen in einer Einführung zur Algebra aufgebaut werden. Wir erläutern das im Sinn einer Vorschau am Problem 2, der Lösung von Polynomgleichungen. Im einfachsten Fall sind die Koeffizienten a_j von f rationale Zahlen, die Nullstellen x_i komplexe Zahlen. Zwischen den Körpern $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ wird nun ein weiterer Körper K eingeschoben:

$$\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}.$$

K wird „Zerfällungskörper“ von f genannt, er ist der kleinste Zwischenkörper, der alle Nullstellen x_i von f enthält. Nun wird das Hindernis gegen die Existenz der gesuchen Lösungsformeln in der „Struktur“ von K gesucht. Genauer gesagt gehört zu K eine Gruppe G von Permutationen der Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$, also eine Untergruppe der vollen Permutationsgruppe $\mathcal{S}_n$. Das Hindernis kann schließlich in der „Struktur“ von G lokalisiert werden:

Es gibt genau dann eine Lösungsformel der gesuchten Art, wenn G „auflösbar“ ist.

Die negative Antwort folgt dann aus dem folgenden Ergebnis:

Für ein „allgemeines“ Polynom ist $G = \mathcal{S}_n$ und $\mathcal{S}_n$ ist für $n \geqslant 5$ nicht auflösbar.

Diese Methode wurde von ABEL und GALOIS skizziert, die Details in den Originalarbeiten sind schwer verständlich. Um die Schritte leichter nachvollzierbar zu machen, wurden im Lauf des 19. Jahrhunderts die Begriffe Gruppe und Körper zur Klärung des theoretischen Hindergrundes axiomatisch eingeführt und schließlich konnte E. ARTIN im Jahr 1948 die GALOIS-Theorie in dem legendären Büchlein [ArE] auf 86 Seiten recht elemetar darstellen; mehr als hundert Jahre nach GALOIS.

Der Weg zu den Resultaten der GALOIS-Theorie hat drei Etappen:

1. Die Grundlagen der Gruppentheorie, insbesondere die Eigenschaften der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$.
2. Die Teilbarkeitseigenschaften im Ring der Polynome, analog zu denen der ganzen Zahlen.
3. Die Struktur von Körpererweiterungen.

Dem entsprechen die drei Kapitel des vorliegenden Buches. Sie sind aber nicht ausschließlich auf die GALOIS-Theorie ausgerichtet, denn diese ist wie das FERMAT-Problem nur eine von mehreren Triebfeldern zur Entwicklung der axiomatisch aufgebauten „modernen“ Algebra gewesen. Ihre Anwendungen gehen weit über die Lösungen der klassischen Probleme hinaus.