
Dynamische Systeme

Anton Braun

Dynamische Systeme

Modellierung mit den Methoden der
Laplace-Transformation

Anton Braun
Wernberg-Köblitz, Deutschland

ISBN 978-3-658-18184-0 ISBN 978-3-658-18185-7 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-18185-7>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Nicht zuletzt durch den rasanten Fortschritt in der Entwicklung kostengünstiger Computer hat die Simulation technischer Systeme immer mehr an Bedeutung gewonnen. Viele Hochschulen und Universitäten bieten deshalb seit geraumer Zeit Vorlesungen auf dem Gebiet der Systemdynamik an, um die Studierenden mit der mathematischen Modellierung von Systemen im weitesten Sinne vertraut zu machen. Mit diesem Buch wird der begründete Versuch unternommen, das dynamische Verhalten von Systemen mit den modernen Methoden der Laplace-Transformation, der Analyse des Frequenzverhaltens sowie der Systembeschreibung mit den Methoden der Zustandsraum-Darstellung durch theoretische Modellierung das transiente Systemverhalten zu simulieren und zu analysieren. Durch die Anwendung der Laplace-Transformation wird es möglich, rechenintensive Differenzialgleichungen linearer Systeme im Zeitbereich durch wesentlich einfachere algebraische Gleichungen im Bildbereich zu ersetzen. Darüber hinaus haben sich die Möglichkeiten der Zustandsbeschreibung vor allem für sogenannte Mehrgrößensysteme bestens bewährt.

Im Zuge der Umsetzung der im Rahmen der Simulation gewonnenen Erkenntnisse auf technische Anlagen genießt die Stabilität von Systemen eine nicht zu unterschätzende Rolle. Auch und gerade aus diesem Grund wurde in dieser Arbeit der Beurteilung der Stabilität technischer Systeme große Priorität eingeräumt.

Im ersten Kapitel werden zunächst, allerdings ohne Anspruch auf Vollständigkeit, die Grundlagen der Laplace-Transformation präsentiert, wie sie im Rahmen der diversen Stoffgebiete dieser Arbeit und der dazu relevanten Beispiele notwendig sind. Hierzu zählen insbesondere die wichtigsten Rechenregeln, die Transformation typischer Zeitfunktionen, die inverse Laplace-Transformation mit ihren typischen Sonderfällen, die Lösung linearer Differenzialgleichungen im Bildbereich sowie die Definition und Bestimmung der Übertragungsfunktion. Ein für technische Anwendungen nicht unwesentlicher Abschnitt ist dem Sachgebiet der Linearisierung von Systemen gewidmet, damit auch für diese außergewöhnlichen Fälle die Laplace-Transformation zur Anwendung kommen kann.

Das zweite Kapitel bringt einleitend zunächst die wichtigsten physikalischen Grundlagen, insbesondere die Newtonschen Axiome für Translation und Rotation, soweit sie dann im Rahmen der Modellierung mechanischer Systeme benötigt werden. Ein besonderes Augenmerk wird in diesem Zusammenhang den schwingfähigen Systemen gewidmet.

Im Vorspann des dritten Kapitels werden einleitend die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten passiver Elemente der Elektrotechnik aufgezeigt. Hierzu zählen insbesondere das Ohmsche Gesetz, das Induktionsgesetz sowie die Kirchhoffschen Gesetze. Anschließend wird an Hand einer Reihe typischer Beispiele das dynamische Verhalten passiver Netzwerke vorwiegend unter Anwendung der Laplace-Transformation analysiert.

Ein wesentlicher Abschnitt des selben Kapitels untersucht die Dynamik aktiver Netzwerke. Hierzu zählen insbesondere der Operationsverstärker sowie sein praktischer Einsatz als elektrisches Filter oder als technischer Regler mit seinen diversen Varianten.

Kapitel vier behandelt im Besonderen elektromechanische Systeme, wie sie in neuerer Zeit vor allem auf dem breiten Gebiet der Mechatronik als Aktuatoren in Erscheinung treten. Hierzu zählen vor allem der konstant erregte Gleichstrommotor und der Servoantrieb. Hohe Priorität wird in diesem Zusammenhang der Analyse und der Simulation des Schrittmotors eingeräumt, dem wegen seiner Robustheit und Flexibilität in weiten Bereichen der Praxis große Bedeutung beigemessen wird.

Weil mit der konventionellen Laplace-Transformation das Übertragungsverhalten von Systemen grundsätzlich nur für den sogenannten Eingrößenfall analysiert werden kann, wird im fünften Kapitel die Analyse von elektrischen und mechanischen Systemen auf der Basis der Zustandsraum-Darstellung aufgezeigt. Neben den einleitenden mathematischen Grundlagen der Vektoranalysis werden hier ganz spezielle Beispiele aufgezeigt und analysiert, die ausnahmslos nur im Zustandsraum tieferen Einblick in die Dynamik des jeweiligen Systems ermöglichen. Ausklingend wird in diesem Kapitel zusätzlich die Dynamik fluider Systeme mit den Methoden der Zustandsbeschreibung in Verbindung mit der Laplace-Transformation einer eingehenden Untersuchung unterzogen.

Vor der jeder Inbetriebnahme aktiver Systeme, insbesondere von Regelkreisen, muss deren Stabilität unter allen Umständen gewährleistet sein. Deshalb wird im Kapitel sechs der Definition sowie der Beurteilung der Stabilität von Systemen mit den Methoden der Laplace-Transformation an Hand diverser Stabilitätskriterien im Eingrößenfall und für Mehrgrößensysteme höchste Priorität beigemessen. Last not least sollte darauf verwiesen werden, dass die hier aufgezeigten Stoffgebiete mit einer Reihe anschaulicher Beispiele untermauert werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Laplace-Transformation	1
1.1	Definition der Laplace-Transformation	1
1.2	Wichtige Transformationsregeln	2
1.2.1	Linearitätsregel	2
1.2.2	Differenziationsregel	3
1.2.3	Integrationsregel	4
1.2.4	Dämpfungssatz	4
1.2.5	Faltungssatz	6
1.2.6	Grenzwertsätze	7
1.2.7	Zeitlicher Verschiebungssatz	9
1.3	Laplace-Transformierte typischer Zeitfunktionen	10
1.3.1	Laplace-Transformierte der Sprungfunktion	10
1.3.2	Laplace-Transformierte der Rampenfunktion	11
1.3.3	Laplace-Transformierte der Exponentialfunktion	11
1.3.4	Laplace-Transformierte des Rechteckimpulses	11
1.3.5	Laplace-Transformierte der Impulsfunktion	12
1.3.6	Laplace-Transformierte der Sinusfunktion	13
1.3.7	Laplace-Transformierte der Kosinusfunktion	13
1.4	Inverse Laplace-Transformation	14
1.4.1	Allgemeine Berechnung der Inversen Laplace-Transformierten mithilfe der Partialbruchzerlegung	15
1.4.2	Partialbruchzerlegung von Funktionen mit ausnahmslos verschiedenen Polstellen	16
1.4.3	Partialbruchzerlegung von Funktionen mit mehrfachen Polstellen	18
1.4.4	Lösung linearer Differenzialgleichungen mithilfe der Laplace-Transformation	19
1.4.5	Übertragungsfunktion	21

1.5	Linearisierung nichtlinearer Systeme	22
1.5.1	Definition der Linearität	22
1.5.2	Analytische Linearisierung	22
2	Mechanische Systeme	27
2.1	Mechanische Elemente	27
2.1.1	Inertiale Elemente	27
2.1.2	Federelemente	28
2.1.3	Dämpferelemente	28
2.2	Modellierung mechanischer Systeme	29
2.2.1	Newton'sche Axiome	29
2.2.2	Das zweite Newton'sche Axiom für Translation	29
2.2.3	Das zweite Newton'sche Axiom für Rotation	31
2.2.4	Feder-Masse-System	34
2.2.5	Massenträgheitsmoment	37
2.2.6	Transientes Verhalten von Systemen zweiter Ordnung	41
2.2.7	Mechanische Systeme mit zwei oder mehreren Freiheitsgraden	51
3	Elektrische Systeme	53
3.1	Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik	53
3.1.1	Elektrische Spannung	53
3.1.2	Elektrische Ladung	54
3.1.3	Elektrische Stromstärke	54
3.1.4	Ohmsches Gesetz	54
3.1.5	Kapazitive Elemente	54
3.1.6	Induktivität	55
3.1.7	Kirchhoffsche Gesetze	55
3.1.8	Typische Testsignale	56
3.2	Modellierung passiver elektrischer Netzwerke	58
3.3	Modellierung aktiver elektrischer Netzwerke	70
3.3.1	Operationsverstärker	70
3.3.2	Praktische Anwendungen	72
4	Elektromechanische Systeme	81
4.1	Gleichstrommotor	81
4.1.1	Der Prinzipschaltplan des fremderregten Gleichstrommotors	82
4.1.2	Geräteübersicht des konstant erregten Gleichstrommotors	82
4.1.3	Blockschaltbild des konstant erregten Gleichstrommotors	84
4.2	Servomotor	87
4.2.1	Anwendungsgebiete und Übertragungsfunktion des Servomotors	87
4.2.2	Anwendungsbeispiel: Brennstoffzufuhr eines Industrieofens	89

4.3	Der Schrittmotor	91
4.3.1	Mechanischer Aufbau des Schrittmotors	91
4.3.2	Typische Anwendungen des Schrittmotors	92
4.3.3	Schrittmotoren mit variabler Reluktanz	93
4.3.4	Mathematische Modellierung des Reluktanz-Schrittmotors	95
4.3.5	Permanentmagnet-Schrittmotoren	99
5	Systemanalyse im Zustandsraum	101
5.1	Begriffe und Definitionen	101
5.1.1	Zustand	101
5.1.2	Zustandsvariablen	102
5.1.3	Zustandsvektor	102
5.1.4	Zustandsraum	102
5.2	Zustandsraumdarstellung dynamischer Systeme	102
5.2.1	Beschreibung linearer Systeme durch Zustandsvariable	102
5.2.2	Lösung der Vektordifferentialgleichung im Zeitbereich	108
5.2.3	Lösung der Zustandsgleichung im Bildbereich	110
5.2.4	Korrelation zwischen Übertragungsfunktion und Zustandsdarstellung	111
5.3	Mathematische Modellierung fluider Systeme	121
5.3.1	Strömungswiderstand und Volumengradient fluider Systeme	122
5.3.2	Mathematische Modellierung eines zu befüllenden Behälters	122
5.3.3	Modellierung von korrelierenden Behältern	124
6	Stabilität technischer Systeme	131
6.1	Definition der Stabilität	131
6.2	Das grundlegende Stabilitätskriterium	132
6.3	Numerische Stabilitätskriterien	134
6.3.1	Das Stabilitätskriterium von Hurwitz	135
6.3.2	Das Stabilitätskriterium von Cremer und Leonhard	137
6.4	Beurteilung der Stabilität im Zustandsraum	139
6.4.1	Beurteilung an Hand der Übertragungsmatrix	139
6.4.2	Das Stabilitätskriterium von Liapunov	142
	Weiterführende Literatur	149
	Stichwortverzeichnis	151