Mathematik und Zaubern:
Ein Einstieg für Mathematiker

Ehrhard Behrends

Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker

Springer Spektrum

Ehrhard Behrends
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-658-17504-7 ISBN 978-3-658-17505-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-17505-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Dass es Zusammenhänge zwischen Zaubern und Mathematik gibt, dürfte sich weitgehend herumgesprochen haben. Die meisten werden dabei aber nur an Zaubertricks denken, bei denen einfache algebraische Operationen eine Rolle spielen.(„Denke Dir eine Zahl. Nimm sie mit Fünf mal. . . . “) Das ist allerdings der bei weitem langweiligste Aspekt. Tatsächlich ist es so, dass man Ergebnisse aus vielen mathematischen Gebieten für die Zauberei nutzen kann: Kombinatorik, Invariantentheorie, Gruppentheorie, Eigenschaften von Primzahlen, Codierungstheorie, Stochastik, . . .

Eine Auswahl findet man in meinem Buch „Der mathematische Zauberstab“, das Ende 2015 bei Rowohlt erschienen ist. Es richtet sich an interessierte Leser ohne einen mathematischen Hintergrund.

Die ganze Wahrheit ist noch viel spektakulärer. Es gibt nämlich eine Fülle von Beispielen, bei denen ein Zaubertrick beim besten Willen nicht ohne die Diskussion eines recht anspruchsvollen mathematischen Hintergrunds vollständig erklärt werden kann. Ich habe dazu eine Reihe von Arbeiten geschrieben, die in Fachzeitschriften erschienen sind.

Das Ziel des vorliegenden Buches ist es, diese Zusammenhänge darzustellen. Es richtet sich an alle interessierten Leserinnen und Leser[1)] mit einer mathematischen Vorbildung (neben Mathematikern denke ich an Informatiker, Physiker, Ingenieure, . . .), die den vergleichsweise anspruchsvollen Hintergrund der Beziehungen zwischen Zauberei und Mathematik kennen lernen wollen. Eine weitere Zielgruppe sind Studierende der Mathematik, die sich den Inhalt in einem Seminar oder Proseminar erarbeiten können.

Und auch wer sich nicht für alle Einzelheiten interessiert, findet bestimmt eine Fülle von Anregungen, um bei der nächsten Familienfeier oder dem nächsten Fest mit Freunden als Zauberer aufzutreten.

Ehrhard Behrends
Berlin, 2017

[1)] Im Interesse der besseren Lesbarkeit wird der Genderaspekt im vorliegenden Buch auf diese Fußnote reduziert: „Leserinnen“ bedeutet ab hier „Leserinnen und Leser“, „der Zauberer“ steht für „der Zauberer oder die Zauberin“, usw.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der 13. Januar 2015 war für mich ein besonderer Tag. Ich war nach Jahrzehnten wieder einmal ein Prüfungskandidat. Als Mathematikprofessor hatte ich eine gewaltige Anzahl von Prüfungen abgenommen, es war nun eine aufregende Erfahrung, dass die Rollen Prüfer-Prüfling vertauscht waren. Es war meine Zauberprüfung, mit der ich in den Magischen Zirkel von Deutschland (MZvD) aufgenommen werden wollte. Die Prüfungskommission bestand aus drei Ortszirkelleitern, und alles wurde von etwa 10 Mitgliedern der „Zauberfreunde Berlin“ aufmerksam verfolgt. Das Ganze dauerte etwa 90 Minuten.

Es begann mit einem Pflichtteil, der in Theorie („Nennen Sie fünf berühmte Zauberer des 19. Jahrunderts!“; „Wie hieß das erste gedruckte Zauberbuch?“ ...) und Praxis („Führen Sie eine Münz-Palmage vor!“; „Zeigen Sie drei verschiedene Forciermöglichkeiten für Karten!“, ...) unterteilt war. Dann folgte die Kür, bei der ich drei Tricks eigener Wahl präsentieren sollte. Ich hatte mir die Tricks ausgesucht, die in diesem Buch in den Kapiteln 2, 4 und 5 beschrieben werden. Die Prüfungskommission war am Ende mit meinen Leistungen zufrieden, und so wurde ich zum „geprüften“ Zauberer.

Die Zauberei hat mich schon lange fasziniert, insbesondere ihre mathematischen Aspekte. Schon vor Jahren hielt ich – inspiriert durch die Bücher von Martin Gardner – einen Vortrag über „Zauberhafte Mathematik “ an der Berliner Urania. Ein neuer, sehr intensiver Impuls ergab sich dann im Jahr 2012 durch die Zusammenarbeit mit dem britischen Kollegen Steve Humble. Steve hatte anlässlich einer Mathematik-und-Kunst-Aktion ein Phänomen entdeckt, das offensichtlich einen mathematischen Hintergrund hatte, der allerdings nicht offensichtlich war[2)]. Wir entschlüsselten das Rätsel, es war der Beginn einer sehr intensiven Auseinandersetzung mit den Beziehungen zwischen Mathematik und Zauberei.

Die erfolgte auf zwei Ebenen. Erstens wollte ich einem interessierten, fachlich nicht vorgebildeten Publikum die Faszination des Themas klarmachen. Das führte zu meinem bei Rowohlt im Jahr 2015 erschienenen Buch „Der mathematische Zauberstab“. Und zweitens stellte sich mehrfach heraus, dass zum vollständigen Verständnis der Funktionsweise gewisser Zaubertricks eine weit anspruchsvollere Mathematik erforderlich ist, als man sie einem Laienpublikum zumuten kann. Ich schrieb einige Arbeiten, die in Fachzeitschriften erschienen sind, und diese Artikel sind der Ausgangspunkt des vorliegenden Buches.

Es enthält 15 Kapitel, die den folgenden beiden Bedingungen genügen:

- Grundlage ist ein interessanter Zaubertrick (den man übrigens auch dann vorführen kann, wenn man den mathematischen Hintergrund nicht bis in alle Einzelheiten verstanden hat).
- Die zugrunde liegende Mathematik benötigt zum Verständnis eine fachliche Vorbildung: Für mathematische Laien wird es (leider) zu schwierig.

[2)]Es handelt sich um den in Kapitel 5 beschriebenen Trick.

Hier ist eine Übersicht:

Kapitel 1: Invarianten. Invarianten sind Eigenschaften, die bei gewissen Transformationen erhalten bleiben. Für die Zauberei sind Eigenschaften eines Kartenspiels interessant, die es auch nach chaotisch aussehenden Mischoperationen garantiert noch hat. Das studieren wir am Beispiel der Hummer-Zaubertricks.

Schwierigkeitsgrad: mittel[3).]

Kapitel 2: Magische Quadrate und magische Würfel. Hier geht es um gut versteckte Folgerungen aus Kommutativ- und Assoziativgesetz. Ein Zuschauer wählt völlig frei mit Zahlen beschriftete Felder eines quadratischen Rasters. Die Summe dieser Zahlen steht schon vorher fest, und das ist auch für Mathematiker kaum zu durchschauen.

Schwierigkeitsgrad: leicht bis mittel; etwas anspruchsvoller ist nur die Übertragung der Ideen von Quadraten auf Würfel und Hyperwürfel.

Kapitel 3: Quadrate mit vorgegebener erster Zeile. Hier spielen Methoden der linearen Algebra die Hauptrolle. Insbesondere wird die Tatsache „allgemeine Lösung gleich partikuläre Lösung plus allgemeine Lösung des homogenen Systems“ mehrfach ausgenutzt.

Schwierigkeitsgrad: leicht bis mittel.

Kapitel 4: Zauberhafte Normalteiler. Wahrscheinlich erstmals in der Zauberei spielen Eigenschaften von Normalteilern in Gruppen eine Rolle. Ein Kartenspiel wird durch Mischen in eine scheinbar chaotische Reihenfolge gebracht, doch plötzlich ist die ursprüngliche Ordnung wiederhergestellt.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 5: Magische Dreiecke und Primfaktoren von Binomialkoeffizienten. Ein Zuschauer legt 10 bunte Karten in eine Reihe. Die wird nach einer einfachen Regel zu einem Dreieck ergänzt: Das dauert eine Weile. Die Farbe der Karte, die als letztes gelegt wird, ist dem Zauberer schon bekannt, wenn er die erste Reihe gesehen hat. Schlüssel zur Erklärung sind Eigenschaften von Primfaktoren in Binomialkoeffizienten.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 6: Magische Pyramiden: Zaubern in drei Dimensionen.

Schwierigkeitsgrad: Die Ideen aus Kapitel 5 werden verallgemeinert: Statt Dreiecken werden nun Pyramiden konstruiert. Wieder spielen – gut versteckt – Primzahlen und Binomialkoeffizienten eine Rolle.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 7: Hyperpyramiden. In diesem Kapitel verlassen wir die uns anschaulich zugängliche dreidimensionale Welt. Das, was in Kapitel 5 und 6 vorgestellt wurde, erweist sich

[3)] Diese und die folgenden Einschätzungen sind natürlich subjektiv. Sie haben sich auch durch Erfahrungen in mehreren Seminaren und Proseminaren an der FU Berlin zum Thema ergeben.

als Spezialfall von Ergebnissen für beliebig hochdimensionale Räume. (Der praktische Nutzen dieser Ergebnisse für Zauberer in unserer Welt sollte allerdings nicht zu hoch eingeschätzt werden.)

Schwierigkeitsgrad: mittel (der schreibtechnische Aufwand ist aber ziemlich erheblich).

Kapitel 8: Vom Melkmischen zur Zahlentheorie. Melkmischen (Englisch „milk shuffle“) ist eine spezielle Mischform, die hin und wieder für Zaubertricks eingesetzt wird. Wie oft muss man diese Mischform auf einen Kartenstapel aus n Karten anwenden, um die Ausgangsreihenfolge wiederherzustellen? (Es geht also um die Periode einer gewissen Permutation.) Überraschender Weise ist der Übergang von n zur Länge dieser Periode sehr verwickelt, und man muss zahlentheoretische Methoden anwenden, um den genauen Zusammenhang zu entschlüsseln.

Schwierigkeitsgrad: mittel bis hoch.

Kapitel 9: Fibonacci zaubert mit quadratischen Resten. Man kann in der Restklassengruppe $\mathbb{Z}_m$ zwei Zahlen x_0, x_1 vorgeben und dann rekursiv eine Folge (x_n) durch $x_{n+1} := x_n + x_{n-1} \bmod n$ (für $n \geq 1$) definieren. Es ist nicht überraschend, dass diese Folge periodisch ist. Bemerkenswerter Weise gibt es aber Situationen, bei denen die Summe der x_n über eine Periode unabhängig von x_0, x_1 ist. (Dabei ist die Wahl $x_0 = x_1 = 0$ nicht zugelassen.) Die Analyse kann in dem Fall erfolgreich durchgeführt werden, dass $m = p$ eine Primzahl ist. Und dann wird es wichtig zu wissen, ob -1 und 5 quadratische Reste modulo p sind oder nicht.

Schwierigkeitsgrad: mittel bis hoch.

Kapitel 10: Australisches Ausgeben. Beim „australischen Ausgeben“ wird auf ganz spezielle Weise eine einzelne Karte aus einem Kartenspiel ausgewählt. Man braucht eine wenig offensichtliche Formel um zu berechnen, welche Karte übrig bleiben wird. Dieses Wissen lässt sich in viele interessante Zaubertricks umsetzen.

Durch eine Variante des Ausgebens ergeben sich weitere Möglichkeiten. Der mathematische Hintergrund ist allerdings weit verwickelter, und viele naheliegende Fragen sind noch offen.

Schwierigkeitsgrad: mittel bis hoch.

Kapitel 11: Ein Esel lese nie: Palindrome. Ein Palindrom ist ein Wort oder Satz, bei dem man das gleiche Ergebnis erhält, wenn man rückwärts liest. Wir konzentrieren uns auf palindromische Kartenstapel: Die äußersten Karten sind identisch (oder Partnerkarten), die zweite und vorletzte ebenfalls und so weiter. Wir zeigen, wie man solche Kartenstapel unauffällig erzeugen kann, entwickeln eine Theorie der erlaubten Mischoperationen (bleibt die Palindromeigenschaft erhalten?) und machen Vorschläge, wie man die Ergebnisse in wirkungsvolle Zaubertricks umsetzen kann.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 12: Die mysteriöse Zahl 1089 und die Fibonaccizahlen. Der 1089-Trick ist ein bekannter Klassiker: Der Zuschauer wählt eine beliebige dreistellige Zahl und führt damit einige einfache Rechenschritte durch. Das Endergebnis ist garantiert 1089. Hier wird das Ergebnis auf Zahlen mit beliebig vielen Stellen verallgemeinert. Dabei gibt es zwei Überraschungen. Erstens war mir bis zu diesen Untersuchungen nicht klar, wie verwickelt Arithmetik (das Zahlenrechnen, das man schon in der Grundschule lernt) sein kann. Und zweitens ist bemerkenswert, dass hier, wo es wirklich niemand erwartet hätte, die Fibonaccizahlen auftauchen.

Schwierigkeitsgrad: hoch.

Kapitel 13: Unmöglich! Das ist ein Codierungstrick. Zauberer und Helfer vereinbaren einen schwer zu durchschauenden Code, um die Nachricht zu übertragen, welche Karte von einem Zuschauer ausgewählt worden ist.

Schwierigkeitsgrad: leicht bis mittel.

Kapitel 14: Codierung mit deBruijn-Folgen. Eine k-deBruijn-Folge ist eine 0-1-Folge der Länge 2^k, in der jede 0-1-Folge der Länge k genau einmal vorkommt. Für die Zauberei sind solche Folgen deswegen interessant, weil man sehr weitreichende Informationen erhält, wenn Zuschauer aus einem geschickt gelegten Kartenspiel Karten ziehen und dann scheinbar harmlose Fragen beantworten.

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Kapitel 15: Ich gewinne (fast) immer. Das ist ein wahrscheinlichkeitstheoretischer Trick. Die Mathematik im Hintergrund ist interessant, man kann jedoch nicht mit Sicherheit sagen, ob er auch klappen wird. (Die Wahrscheinlichkeit, dass alles gut geht, ist allerdings beruhigend hoch.) Der Zuschauer wählt eine Farbreihenfolge, etwa rot-rot-schwarz, der Zauberer sucht sich auch eine aus, und derjenige gewinnt, dessen Farbfolge beim Aufdecken eines gut gemischten Kartenspiels zuerst erscheint. Die Chancen für den Zauberer sind bei geschickter Wahl immer besser als die des Zuschauers!

Schwierigkeitsgrad: mittel.

Am Ende des Buches findet man noch ein kurzes Literaturverzeichnis: Bücher zum Thema „Mathematik und Zaubern“, Einführungen in die Zauberkunst sowie ergänzende Literatur zu den einzelnen Kapiteln.

Wie schon im Vorwort erwähnt, kann das Buch unter verschiedenen Aspekten gelesen werden. Als Mathematiker oder sonstiger Wissenschaftler mit einem mathematischen Hintergrund (Informatik, Physik, Ingenieur, ...) kann man sich überraschen lassen, welche unterschiedlichen Aspekte der Mathematik für die Zauberei genutzt werden können.

Und für Organisatoren eines Proseminars/Seminars bieten sich die einzelnen Kapitel als Vorschläge für Vorträge an. An der FU Berlin stand das Thema „Mathematik und Zaubern“ mehrfach im Vorlesungsverzeichnis[4)]. Da die Schwierigkeitsgrade der

[4)] Am Ende gab es immer einen Praxistest: einen Workshop für ein allgemeines Publikum zur „Langen Nacht der Wissenschaften“, der von den Teilnehmern der Lehrversanstaltung mit viel Engagement durchgeführt wurde.

verschiedenen Kapitel etwas schwanken, kann man die unterschiedliche Belastbarkeit der Studierenden berücksichtigen.

Abschließend sei noch ein allgemeiner Hinweis zum Thema „Zaubern“ gestattet. In diesem Buch wird eigentlich nur der mathematische Hintergrund beschrieben. Für Zaubertricks gilt aber das gleiche wie beim Verschenken eines guten Parfums: Die Verpackung ist (mindestens) genau so wichtig wie der Inhalt.

Wer etwas mehr zur konkreten Umsetzung der Theorie in Zaubertricks erfahren möchte, findet dazu einige Tipps in meinem Buch „Der mathematische Zauberstab“. Insbesondere gibt es drei Ratschläge: üben, üben, üben! Man sollte erst dann mit einem Trick vor ein Publikum treten, wenn er „im stillen Kämmerlein“ mindestens zehn Mal geklappt hat. Zu einem richtigen kleinen Kunstwerk kann er allerdings erst dann werden, wenn er von einer engagierten und kreativen Präsentation begleitet wird. Glücklicherweise kann man dazu viele Tipps in Zauberbüchern finden (siehe das Literaturverzeichnis).

Und sollten Sie Lust darauf bekommen haben, die Beschäftigung mit der Zauberei zu intensivieren, so bietet es sich an, einen Ortszirkel des magischen Zirkels von Deutschland MZvD in Ihrer Nähe aufzusuchen. Die entsprechenden Informationen findet man im Internet unter `www.mzvd.de/der-verein/ortszirkel`.