
Mathematik für die Informatik




Lizenz zum Wissen.

Sichern Sie sich umfassendes Technikwissen mit Sofortzugriff auf tausende Fachbücher und Fachzeitschriften aus den Bereichen: Automobiltechnik, Maschinenbau, Energie + Umwelt, E-Technik, Informatik + IT und Bauwesen.

Exklusiv für Leser von Springer-Fachbüchern: Testen Sie Springer für Professionals 30 Tage unverbindlich. Nutzen Sie dazu im Bestellverlauf Ihren persönlichen Aktionscode **C0005406** auf www.springerprofessional.de/buchaktion/



Springer für Professionals.
Digitale Fachbibliothek. Themen-Scout. Knowledge-Manager.

-  Zugriff auf tausende von Fachbüchern und Fachzeitschriften
-  Selektion, Komprimierung und Verknüpfung relevanter Themen durch Fachredaktionen
-  Tools zur persönlichen Wissensorganisation und Vernetzung

www.entschieden-intelligenter.de

Springer für Professionals

 Springer

Rudolf Berghammer

Mathematik für die Informatik

Grundlegende Begriffe,
Strukturen und ihre Anwendung

2., erweiterte und aktualisierte Auflage

Rudolf Berghammer
Kiel, Deutschland

Die erste Auflage erschien unter dem Titel „Mathematik für Informatiker“.

ISBN 978-3-658-16711-0 ISBN 978-3-658-16712-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-16712-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014, 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage dieses Buchs baut auf den gleichen Leitgedanken auf, die in der Einleitung zur ersten Auflage formuliert wurden. Einer davon ist, den Studierenden die Bedeutung der Mathematikausbildung im Rahmen eines Studiums der Informatik aufzuzeigen und sie auf spätere mathematische Begriffe und Anwendungen gut vorzubereiten. Zu diesem Zweck wurde in der ersten Auflage dieses Buchs an vielen Stellen angemerkt, wo und wie entsprechende mathematische Themen in späteren Studienabschnitten wieder aufgegriffen werden. Aufgrund von zahlreichen Diskussionen sowohl mit Studierenden als auch mit Kollegen an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel geht diese zweite Auflage einen Schritt weiter. Zusätzlich zu den bisherigen Anmerkungen enthält sie zwei neue Kapitel, in denen anhand von konkreten Problemstellungen Anwendungen von mathematischen Konzepten und Methoden in der Informatik demonstriert werden. Damit verändert sich auch die Zählung; die Kapitel 5 bis 8 der ersten Auflage werden nun zu den Kapiteln 6 bis 9.

Kapitel 5 ist das erste der zwei zusätzlichen Kapitel. Es behandelt eine der Hauptaufgaben der Informatik, nämlich die Programmierung von Algorithmen. Die entscheidende Eigenschaft, welche Programme zu erfüllen haben, ist ihre Korrektheit, also, dass sie die Probleme, zu deren Lösung sie entworfen wurden, auch wirklich lösen. Letzteres beinhaltet insbesondere, dass sie weder falsche Resultate produzieren noch durch einen Fehler „abstürzen“ oder nicht terminieren. In Kapitel 5 wird eine einfache Programmiersprache eingeführt und es wird demonstriert, wie man mit mathematischen Mitteln beweisen kann, dass ein Programm korrekt im Hinblick auf eine mathematisch beschriebene Problemstellung ist. Auch wird eine Technik vorgestellt, die es ermöglicht, von einer solchen Problemstellung durch mathematische Überlegungen zu einem – per Konstruktion – korrekten Programm zu gelangen.

In Kapitel 10, dem zweiten neuen Kapitel, wird eine weitere Anwendung von Konzepten und Methoden der Mathematik in der Informatik vorgestellt. Als Weiterführung von Kapitel 5 werden zwei Beispiele von generischen Programmen behandelt, also von Programmen, die einen sehr hohen Grad an Wiederverwendbarkeit besitzen. Sie werden durch graphentheoretische Probleme motiviert und auch auf solche Probleme angewandt. Dadurch wird das in Abschnitten der (nach neuer Zählung) Kapitel 8 und 9 behandelte Gebiet der Graphen, welches sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik eine wichtige Rolle spielt, im Hinblick auf praktische Anwendungen vertieft.

Gleich im ersten Kapitel dieses Texts werden die von der Schule her bekannten Zahlenbereiche (natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen und reelle Zahlen) eingeführt. Um den Zugang nicht unnötig zu erschweren, geschieht dies sehr knapp und in sehr informeller und intuitiver Weise. Die natürlichen Zahlen bilden für die Informatik den wohl weitaus wichtigsten Zahlenbereich und dieser ist eigentlich auch der einzige, von dem in diesem Buch wesentliche (und in der Schule wahrscheinlich nicht explizit so angesprochene) Eigenschaften verwendet werden. Aus diesem Grund enthält diese zweite Auflage, neben den oben angesprochenen neuen Kapiteln 5 und 10, als dritte Erweiterung einen Anhang. In ihm wird gezeigt, wie man die natürlichen Zahlen und die elementaren Operationen auf ihnen formal in der Sprache der Mengenlehre erklären kann.

Durch diesen Anhang verändert sich die Ordnungszahl der Literaturhinweise von 9 zu 11. Als eine weitere Folge der eben beschriebenen Erweiterungen wurden in dieser zweiten Auflage einige Passagen der ersten Auflage abgeändert bzw. ergänzt. Weiterhin wurden alle gefundenen Tippfehler beseitigt und einige unschöne und missverständliche Formulierungen verbessert.

Auch bei der Erstellung dieser zweiten Auflage habe ich wertvolle Hinweise von Studierenden und Kollegen erhalten, insbesondere von Frau I. Stucke und den Herren D. Boysen, N. Danilenko und G. Schmidt, bei denen ich mich sehr herzlich bedanke. Mit meinen Kollegen S. Börm und B. Thalheim habe ich in der letzten Zeit zahlreiche Diskussionen über die Rolle und Bedeutung der Mathematik in der Informatik geführt, die immer ein Gewinn für mich waren. Dafür sei ihnen herzlich gedankt. Dem Verlag Springer Vieweg und Frau Sybille Thelen danke ich schließlich noch für die wiederum sehr angenehme Zusammenarbeit bei der Drucklegung dieses Buchs.

Kiel, im November 2016

Rudolf Berghammer.

Einleitung zur ersten Auflage

Viele der modernen Wissenschaften sind ohne die Verwendung mathematischer Methoden und Techniken nicht mehr denkbar. Dies trifft auch auf die Informatik zu. Insbesondere gilt dies natürlich für ihr Teilgebiet „theoretische Informatik“. Eine Reihe von Themen der theoretischen Informatik sind so mathematisch, dass es oft sehr schwer fällt, eine klare Trennlinie zwischen der Mathematik und der theoretischen Informatik zu ziehen. Aber auch die sogenannte praktische oder angewandte Informatik benutzt sehr häufig Mathematik als Hilfsmittel, etwa bei der Speicherung von Daten, wo modulares Rechnen oft hilfreich ist, oder bei der Datenverschlüsselung, die wesentlich auf Ergebnissen aus der Algebra und der Zahlentheorie aufbaut, oder der Computergrafik, die viel mit Geometrie zu tun hat, oder den logischen Schaltungen, deren mathematische Grundlage die Theorie der sogenannten Booleschen Algebren ist.

Noch vor ungefähr zehn Jahren war die Informatikausbildung in Bezug auf Mathematik-Vorlesungen oft sehr ähnlich oder sogar identisch zur Ausbildung von Studierenden der Mathematik. Auf die höhere Schule (etwa ein Gymnasium) aufbauend wurde damals im Rahmen von Vorlesungen von den Lehrenden demonstriert, wie man in der Mathematik vorgeht, insbesondere Begriffe einführt, Aussagen (als Lemmata, Sätze, Theoreme usw.) formuliert und diese dann beweist. Die Techniken des Beweisens und die ihnen zugrundeliegenden logischen Gesetze wurden jedoch in der Regel nur knapp diskutiert. Man glaubte, auf eine gewisse Schulvorbildung aufbauend, dass sich durch das Demonstrieren von Beweisen in Vorlesungen und das Selberfinden solcher in Übungen und im Rahmen von Hausaufgaben mit der Zeit ein Gefühl dafür entwickelt, was ein mathematischer Beweis ist und wie man ihn zusammen mit der zu beweisenden Aussage so aufschreibt, dass beides zusammen als bewiesener Satz der Mathematik akzeptiert wird. Auch wurde nur sehr wenig auf das konkrete Aufschreiben von Aussagen eingegangen, d.h. auf all die notationellen Besonderheiten und Abkürzungen, die von Mathematik betreibenden Personen zu Vereinfachungszwecken normalerweise verwendet werden, sich aber von Person zu Person und von Fach zu Fach manchmal deutlich unterscheiden können.

Diese traditionelle Vorgehensweise führte an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel bei den Informatikstudierenden zu immer größeren Problemen. Deshalb wurde vor einigen Jahren im Kieler Institut für Informatik in Zusammenarbeit mit dem Mathematischen Seminar ein neuer drei-semesteriger Zyklus von Einführungs-Vorlesungen in die Mathematik für Informatikstudierende entworfen. Er soll den Übergang von der höheren Schule zum Studium an einer wissenschaftlichen Hochschule sanfter gestalten. Dieser Text basiert auf der ersten Vorlesung des Zyklus. In ihm wird sehr viel Wert auf die grundlegenden Begriffe der Mathematik gelegt, sowie auf ihre Techniken und Vorgehensweisen und auch auf ihre Sprache – und dies alles in möglichst verständlicher aber auch präziser Weise und mit detaillierten Beweisen. Es muss an dieser Stelle aber unbedingt darauf hingewiesen werden, dass vieles, was in Vorlesungen an mündlichen Hinweisen, an Bildern, an erläuternden zusätzlichen Rechnungen, an Fragen und sonstigen Interaktionen geschieht, nicht durch einen Text in Buchform darstellbar ist. Ein begleitendes Lehrbuch ersetzt also in der Regel nicht den Besuch einer Vorlesung. Es unterstützt ihn nur; der Besuch einer Vorlesung ist insbesondere am Anfang des Studiums immer noch sehr wesentlich für das Verstehen dessen, was unterrichtet wird. Gleiches gilt auch für die normalerweise Vorlesungen beglei-

tenden Übungen. Ihre Präsenzaufgaben dienen hier dazu, unter Anleitung eines Tutors zu lernen, wie man mathematische Probleme löst. Darauf aufbauende Hausaufgaben geben der Studentin oder dem Studenten die Möglichkeit zu zeigen, was sie bzw. er ohne Anleitung zu leisten im Stande ist. Dem Lehrenden (also in der Regel der Professorin oder dem Professor) geben sie die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit und den Lernerfolg der Studierenden zu kontrollieren.

Hier ist eine kurze Zusammenfassung des Inhaltes. Im ersten Kapitel wird die Sprache der Mengenlehre eingeführt. Alle Beweise werden hier noch in der Umgangssprache geführt, wobei als Logik „der gesunde Menschenverstand“ benutzt wird. Diese Art der Beweisführung in einer natürlichen Sprache und mit nur wenigen logischen Symbolen (wie Quantoren und Implikationspfeilen) war früher durchaus üblich. Die Logik als ein Mittel zum Formulieren und Beweisen von mathematischen Aussagen ist der Inhalt von Kapitel 2. Bevor auf das Beweisen selber im Detail in Kapitel 4 eingegangen wird, werden in Kapitel 3 noch allgemeine Produkte behandelt, sowie, darauf aufbauend, Konstruktionen von Informatik-Datenstrukturen. Dieses Kapitel wurde eingeschoben, damit Mathematik auch mit Hilfe von anderen Objekten als den von der Schule her bekannten Zahlen betrieben werden kann. Bei der Vorstellung der Beweistechniken in Kapitel 4 wird das zugrundeliegende Prinzip jeweils erklärt. Dann werden einige Anwendungen demonstriert. Dabei wird auch erklärt, wie man formal und logisch korrekt vorzugehen hat, wenn man nicht geübt ist, und welche Formulierungen „altgedienter und erfahrener Mathematiker“ genau genommen welchen logischen Formeln entsprechen. Insbesondere die oft unterdrückten Allquantoren sorgen hier bei einer Anfängerin oder einem Anfänger oft für Schwierigkeiten. Die beiden zentralen Konzepte der Funktionen und Relationen werden schon im ersten Kapitel eingeführt. Dies geschieht aber sehr knapp. Der einzige Zweck, sie so früh einzuführen, ist, sie für Beispiele in den folgenden drei Kapiteln bereitzustellen. In den beiden Kapiteln 5 und 6 werden diese Begriffe nun im Detail behandelt. Kapitel 5 ist den Funktionen gewidmet und Kapitel 6 den Relationen. Von den Relationen ist es nur ein kleiner Schritt zu den gerichteten Graphen. Der ungerichteten Variante dieser mathematischen Struktur ist das vorletzte Kapitel 7 des Texts zugeordnet. Da ungerichtete Graphen oft auch benutzt werden können, um kombinatorische Fragestellungen zu verdeutlichen, etwa die Anzahl von Zugmöglichkeiten bei Spielen, geschieht die Einführung in die Theorie der ungerichteten Graphen zusammen mit der Einführung in die elementare Kombinatorik. Das letzte Kapitel 8 stellt schließlich einen Einstieg in die grundlegendsten mathematischen Strukturen der Algebra dar. Dies geschieht aber unter einem sehr allgemeinen Blickwinkel. Ich hoffe, dass dadurch die Verwendung allgemeiner mathematischer Strukturen gut vorbereitet wird.

Ich habe mich in diesem Text dazu entschieden, Mengen vor der formalen mathematischen Logik zu behandeln. Dies hat den Vorteil, dass dadurch die in der Mathematik immer wieder verwendeten logischen Verknüpfungen und deren Grundeigenschaften gut herausgearbeitet werden können. Weiterhin kann man durch das Vorgehen demonstrieren, dass durchaus auch in der Umgangssprache logisch argumentiert werden kann, vorausgesetzt man drückt sich präzise aus. Schließlich stehen durch die Mengen bei der Einführung einer formalen logischen Sprache genügend viele mathematische Objekte zur Formulierung von Beispielen zur Verfügung, und man kann auch sofort die in der mathematischen Praxis normalerweise verwendeten Kurzschreibweisen erklären. Nachteilig an der Vorgehenswei-

se ist, dass die Logik des gesunden Menschenverstandes vielleicht doch nicht von allen Menschen in derjenigen Präzision verstanden und angewendet wird, wie es für Mathematik notwendig ist. Auch lassen umgangssprachliche Argumentationen die verwendeten Schlüsse oft nicht so deutlich erkennen wie Regelanwendungen in der formalen logischen Sprache. Deswegen gibt es viele Mathematikbücher, in denen die Sprache der Logik vor der Sprache der Mengenlehre behandelt wird. Teilweise werden diese beiden Grundpfeiler der Mathematik auch verschränkt eingeführt.

Mit Ausnahme von Kapitel 4 endet jedes Kapitel mit einem kurzen Abschnitt und schließlich einer Reihe von Übungsaufgaben. Diese speziellen Abschnitte vor den Übungsaufgaben sind für das weitere Vorgehen im Stoff nicht wesentlich, aber hoffentlich hilfreich. Sie runden nämlich unter bestimmten Blickwinkeln die einzelnen Themen in informeller Weise ab und zeigen auch auf, wo und wie die Themen in späteren Studienabschnitten wieder aufgegriffen werden. Der entsprechende Abschnitt von Kapitel 4 ist dem Finden von Beweisen gewidmet. Dies geschieht durch das Aufzeigen von Vorgehensweisen, die helfen können, einen Beweis zu finden. Sie werden mittels vieler Beispiele verdeutlicht, und das macht den Abschnitt im Vergleich zu den anderen ergänzenden Abschnitten wesentlich umfangreicher.

Der vorliegende Text basiert auf einem handschriftlichem Manuskript von mir, das von E. Lurz im Wintersemester 2010/2011 in \LaTeX gesetzt wurde und das ich anschließend weiter entwickelte. Die Gliederung und Stoffauswahl zur Vorlesung erfolgte in enger Zusammenarbeit mit Kollegen des Instituts für Informatik, insbesondere mit Herrn A. Srivastav. Bei der Weiterentwicklung des Texts wurde ich von Frau B. Langfeld, Frau I. Stucke und den Herren N. Danilenko und L. Kliemann unterstützt, bei denen ich mich, wie auch bei Herrn Srivastav, sehr herzlich bedanke. Auch bedanken möchte ich mich bei C. Giessen, L. Kuhlmann, S. Reif, C. Robenek, C. Roschat und G. Schmidt für das Lesen von Vorversionen und Verbesserungshinweise. Ich bedanke mich schließlich noch sehr herzlich beim Verlag Springer Vieweg, insbesondere bei Frau Sybille Thelen, für die sehr angenehme Zusammenarbeit, sowie bei meiner Frau Sibylle für ihre Unterstützung und Hilfe.

Kiel, im Juli 2014

Rudolf Berghammer.

Inhalt

Vorwort zur zweiten Auflage	v
Einleitung zur ersten Auflage	vii
1 Mengentheoretische Grundlagen	1
1.1 Der Cantorsche Mengenbegriff	1
1.2 Einige Konstruktionen auf Mengen	7
1.3 Potenzmengen und Kardinalitäten	15
1.4 Relationen und Funktionen	20
1.5 Ergänzungen zum Funktionsbegriff	27
1.6 Übungsaufgaben	30
2 Logische Grundlagen	33
2.1 Sprache und Ausdrucksweise der Mathematik	33
2.2 Grundlagen der Aussagenlogik	35
2.3 Grundlagen der Prädikatenlogik	44
2.4 Die Grenzen des naiven Mengenbegriffs	57
2.5 Übungsaufgaben	59
3 Allgemeine direkte Produkte und Datenstrukturen	63
3.1 Tupel, Folgen und Familien	63
3.2 Lineare Listen	68
3.3 Knotenmarkierte Binärbäume	74
3.4 Zur induktiven Definition von Mengen	80
3.5 Übungsaufgaben	82
4 Mathematische Beweise	85
4.1 Direkte Beweise	85
4.2 Indirekte Beweise	87
4.3 Beweise durch Widerspruch	89
4.4 Induktionsbeweise	94
4.5 Einige Hinweise zum Finden von Beweisen	103
4.6 Übungsaufgaben	114
5 Anwendung: Spezifikation und Programmverifikation	117
5.1 Imperative Programmierung	117
5.2 Partielle Korrektheit und ein Verifikationskalkül	120
5.3 Beweisverpflichtungen und Programmkonstruktion	125
5.4 Totale Korrektheit und Terminierung	135
5.5 Bemerkungen zu logischen Kalkülen	139
5.6 Übungsaufgaben	141
6 Spezielle Funktionen	145
6.1 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität	145
6.2 Kardinalitätsvergleich von Mengen	158
6.3 Wachstum spezieller Funktionen	166

6.4	Zur Berechenbarkeit von Funktionen	177
6.5	Übungsaufgaben	179
7	Spezielle Relationen und gerichtete Graphen	183
7.1	Äquivalenzrelationen und Partitionen	183
7.2	Ordnungsrelationen und geordnete Mengen	192
7.3	Grundbegriffe gerichteter Graphen	206
7.4	Bemerkungen zu mehrstelligen Relationen	219
7.5	Übungsaufgaben	220
8	Elementare Kombinatorik und ungerichtete Graphen	223
8.1	Fakultäten und Binomialkoeffizienten	223
8.2	Grundbegriffe ungerichteter Graphen	236
8.3	Dünne ungerichtete Graphen	245
8.4	Variationen des Graphenbegriffs	254
8.5	Übungsaufgaben	256
9	Grundbegriffe algebraischer Strukturen	259
9.1	Homogene algebraische Strukturen	259
9.2	Strukturerhaltende Funktionen	270
9.3	Unterstrukturen	277
9.4	Produkt- und Quotientenstrukturen	283
9.5	Der Körper der komplexen Zahlen	292
9.6	Einige Ergänzungen zum mathematischen Strukturbegriff	300
9.7	Übungsaufgaben	304
10	Anwendung: Generische Programmierung	307
10.1	Einige motivierende Beispiele	307
10.2	Berechnung minimaler und maximaler Teilmengen	314
10.3	Anwendungen und Erweiterungen	319
10.4	Bemerkungen zum Lösen schwieriger Optimierungsprobleme	332
10.5	Übungsaufgaben	334
11	Anhang: Formale Einführung der natürlichen Zahlen	337
11.1	Axiomatische Einführung mittels Peano-Strukturen	337
11.2	Eindeutigkeit und Existenz von Peano-Strukturen	342
11.3	Arithmetische Operationen	348
11.4	Die Standard-Ordnungsrelation der natürlichen Zahlen	354
11.5	Übungsaufgaben	359
12	Anhang: Einige Literaturhinweise	361
	Index	367