Mathematik für die Informatik

Rudolf Berghammer

Mathematik für die Informatik

Grundlegende Begriffe, Strukturen und ihre Anwendung

2., erweiterte und aktualisierte Auflage

Springer Vieweg

Rudolf Berghammer
Kiel, Deutschland

Die erste Auflage erschien unter dem Titel „Mathematik für Informatiker“.

ISBN 978-3-658-16711-0 ISBN 978-3-658-16712-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-16712-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage dieses Buchs baut auf den gleichen Leitgedanken auf, die in der Einleitung zur ersten Auflage formuliert wurden. Einer davon ist, den Studierenden die Bedeutung der Mathematikausbildung im Rahmen eines Studiums der Informatik aufzuzeigen und sie auf spätere mathematische Begriffe und Anwendungen gut vorzubereiten. Zu diesem Zweck wurde in der ersten Auflage dieses Buchs an vielen Stellen angemerkt, wo und wie entsprechende mathematische Themen in späteren Studienabschnitten wieder aufgegriffen werden. Aufgrund von zahlreichen Diskussionen sowohl mit Studierenden als auch mit Kollegen an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel geht diese zweite Auflage einen Schritt weiter. Zusätzlich zu den bisherigen Anmerkungen enthält sie zwei neue Kapitel, in denen anhand von konkreten Problemstellungen Anwendungen von mathematischen Konzepten und Methoden in der Informatik demonstriert werden. Damit verändert sich auch die Zählung; die Kapitel 5 bis 8 der ersten Auflage werden nun zu den Kapiteln 6 bis 9.

Kapitel 5 ist das erste der zwei zusätzlichen Kapitel. Es behandelt eine der Hauptaufgaben der Informatik, nämlich die Programmierung von Algorithmen. Die entscheidende Eigenschaft, welche Programme zu erfüllen haben, ist ihre Korrektheit, also, dass sie die Probleme, zu deren Lösung sie entworfen wurden, auch wirklich lösen. Letzteres beinhaltet insbesondere, dass sie weder falsche Resultate produzieren noch durch einen Fehler „abstürzen“ oder nicht terminieren. In Kapitel 5 wird eine einfache Programmiersprache eingeführt und es wird demonstriert, wie man mit mathematischen Mitteln beweisen kann, dass ein Programm korrekt im Hinblick auf eine mathematisch beschriebene Problemstellung ist. Auch wird eine Technik vorgestellt, die es ermöglicht, von einer solchen Problemstellung durch mathematische Überlegungen zu einem – per Konstruktion – korrekten Programm zu gelangen.

In Kapitel 10, dem zweiten neuen Kapitel, wird eine weitere Anwendung von Konzepten und Methoden der Mathematik in der Informatik vorgestellt. Als Weiterführung von Kapitel 5 werden zwei Beispiele von generischen Programmen behandelt, also von Programmen, die einen sehr hohen Grad an Wiederverwendbarkeit besitzen. Sie werden durch graphentheoretische Probleme motiviert und auch auf solche Probleme angewandt. Dadurch wird das in Abschnitten der (nach neuer Zählung) Kapitel 8 und 9 behandelte Gebiet der Graphen, welches sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik eine wichtige Rolle spielt, im Hinblick auf praktische Anwendungen vertieft.

Gleich im ersten Kapitel dieses Texts werden die von der Schule her bekannten Zahlenbereiche (natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen und reelle Zahlen) eingeführt. Um den Zugang nicht unnötig zu erschweren, geschieht dies sehr knapp und in sehr informeller und intuitiver Weise. Die natürlichen Zahlen bilden für die Informatik den wohl weitaus wichtigsten Zahlenbereich und dieser ist eigentlich auch der einzige, von dem in diesem Buch wesentliche (und in der Schule wahrscheinlich nicht explizit so angesprochene) Eigenschaften verwendet werden. Aus diesem Grund enthält diese zweite Auflage, neben den oben angesprochenen neuen Kapiteln 5 und 10, als dritte Erweiterung einen Anhang. In ihm wird gezeigt, wie man die natürlichen Zahlen und die elementaren Operationen auf ihnen formal in der Sprache der Mengenlehre erklären kann.

Durch diesen Anhang verändert sich die Ordnungszahl der Literaturhinweise von 9 zu 11. Als eine weitere Folge der eben beschriebenen Erweiterungen wurden in dieser zweiten Auflage einige Passagen der ersten Auflage abgeändert bzw. ergänzt. Weiterhin wurden alle gefundenen Tippfehler beseitigt und einige unschöne und missverständliche Formulierungen verbessert.

Auch bei der Erstellung dieser zweiten Auflage habe ich wertvolle Hinweise von Studierenden und Kollegen erhalten, insbesondere von Frau I. Stucke und den Herren D. Boysen, N. Danilenko und G. Schmidt, bei denen ich mich sehr herzlich bedanke. Mit meinen Kollegen S. Börm und B. Thalheim habe ich in der letzten Zeit zahlreiche Diskussionen über die Rolle und Bedeutung der Mathematik in der Informatik geführt, die immer ein Gewinn für mich waren. Dafür sei ihnen herzlich gedankt. Dem Verlag Springer Vieweg und Frau Sybille Thelen danke ich schließlich noch für die wiederum sehr angenehme Zusammenarbeit bei der Drucklegung dieses Buchs.

Kiel, im November 2016 Rudolf Berghammer.

Einleitung zur ersten Auflage

Viele der modernen Wissenschaften sind ohne die Verwendung mathematischer Methoden und Techniken nicht mehr denkbar. Dies trifft auch auf die Informatik zu. Insbesondere gilt dies natürlich für ihr Teilgebiet „theoretische Informatik“. Eine Reihe von Themen der theoretischen Informatik sind so mathematisch, dass es oft sehr schwer fällt, eine klare Trennlinie zwischen der Mathematik und der theoretischen Informatik zu ziehen. Aber auch die sogenannte praktische oder angewandte Informatik benutzt sehr häufig Mathematik als Hilfsmittel, etwa bei der Speicherung von Daten, wo modulares Rechnen oft hilfreich ist, oder bei der Datenverschlüsselung, die wesentlich auf Ergebnissen aus der Algebra und der Zahlentheorie aufbaut, oder der Computergrafik, die viel mit Geometrie zu tun hat, oder den logischen Schaltungen, deren mathematische Grundlage die Theorie der sogenannten Booleschen Algebren ist.

Noch vor ungefähr zehn Jahren war die Informatikausbildung in Bezug auf Mathematik-Vorlesungen oft sehr ähnlich oder sogar identisch zur Ausbildung von Studierenden der Mathematik. Auf die höhere Schule (etwa ein Gymnasium) aufbauend wurde damals im Rahmen von Vorlesungen von den Lehrenden demonstriert, wie man in der Mathematik vorgeht, insbesondere Begriffe einführt, Aussagen (als Lemmata, Sätze, Theoreme usw.) formuliert und diese dann beweist. Die Techniken des Beweisens und die ihnen zugrundeliegenden logischen Gesetze wurden jedoch in der Regel nur knapp diskutiert. Man glaubte, auf eine gewisse Schulvorbildung aufbauend, dass sich durch das Demonstrieren von Beweisen in Vorlesungen und das Selberfinden solcher in Übungen und im Rahmen von Hausaufgaben mit der Zeit ein Gefühl dafür entwickelt, was ein mathematischer Beweis ist und wie man ihn zusammen mit der zu beweisenden Aussage so aufschreibt, dass beides zusammen als bewiesener Satz der Mathematik akzeptiert wird. Auch wurde nur sehr wenig auf das konkrete Aufschreiben von Aussagen eingegangen, d.h. auf all die notationellen Besonderheiten und Abkürzungen, die von Mathematik betreibenden Personen zu Vereinfachungszwecken normalerweise verwendet werden, sich aber von Person zu Person und von Fach zu Fach manchmal deutlich unterscheiden können.

Diese traditionelle Vorgehensweise führte an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel bei den Informatikstudierenden zu immer größeren Problemen. Deshalb wurde vor einigen Jahren im Kieler Institut für Informatik in Zusammenarbeit mit dem Mathematischen Seminar ein neuer drei-semestriger Zyklus von Einführungs-Vorlesungen in die Mathematik für Informatikstudierende entworfen. Er soll den Übergang von der höheren Schule zum Studium an einer wissenschaftlichen Hochschule sanfter gestalten. Dieser Text basiert auf der ersten Vorlesung des Zyklus. In ihm wird sehr viel Wert auf die grundlegenden Begriffe der Mathematik gelegt, sowie auf ihre Techniken und Vorgehensweisen und auch auf ihre Sprache – und dies alles in möglichst verständlicher aber auch präziser Weise und mit detaillierten Beweisen. Es muss an dieser Stelle aber unbedingt darauf hingewiesen werden, dass vieles, was in Vorlesungen an mündlichen Hinweisen, an Bildern, an erläuternden zusätzlichen Rechnungen, an Fragen und sonstigen Interaktionen geschieht, nicht durch einen Text in Buchform darstellbar ist. Ein begleitendes Lehrbuch ersetzt also in der Regel nicht den Besuch einer Vorlesung. Es unterstützt ihn nur; der Besuch einer Vorlesung ist insbesondere am Anfang des Studiums immer noch sehr wesentlich für das Verstehen dessen, was unterrichtet wird. Gleiches gilt auch für die normalerweise Vorlesungen begleitenden Übungen. Ihre Präsenzaufgaben dienen hier dazu, unter Anleitung eines Tutors zu lernen, wie man mathematische Probleme löst. Darauf aufbauende Hausaufgaben geben der Studentin oder dem Studenten die Möglichkeit zu zeigen, was sie bzw. er ohne Anleitung zu leisten im Stande ist. Dem Lehrenden (also in der Regel der Professorin oder dem Professor) geben sie die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit und den Lernerfolg der Studierenden zu kontrollieren.

Hier ist eine kurze Zusammenfassung des Inhaltes. Im ersten Kapitel wird die Sprache der Mengenlehre eingeführt. Alle Beweise werden hier noch in der Umgangssprache geführt, wobei als Logik „der gesunde Menschenverstand" benutzt wird. Diese Art der Beweisführung in einer natürlichen Sprache und mit nur wenigen logischen Symbolen (wie Quantoren und Implikationspfeilen) war früher durchaus üblich. Die Logik als ein Mittel zum Formulieren und Beweisen von mathematischen Aussagen ist der Inhalt von Kapitel 2. Bevor auf das Beweisen selber im Detail in Kapitel 4 eingegangen wird, werden in Kapitel 3 noch allgemeine Produkte behandelt, sowie, darauf aufbauend, Konstruktionen von Informatik-Datenstrukturen. Dieses Kapitel wurde eingeschoben, damit Mathematik auch mit Hilfe von anderen Objekten als den von der Schule her bekannten Zahlen betrieben werden kann. Bei der Vorstellung der Beweistechniken in Kapitel 4 wird das zugrundeliegende Prinzip jeweils erklärt. Dann werden einige Anwendungen demonstriert. Dabei wird auch erklärt, wie man formal und logisch korrekt vorzugehen hat, wenn man nicht geübt ist, und welche Formulierungen „altgedienter und erfahrener Mathematiker" genau genommen welchen logischen Formeln entsprechen. Insbesondere die oft unterdrückten Allquantoren sorgen hier bei einer Anfängerin oder einem Anfänger oft für Schwierigkeiten. Die beiden zentralen Konzepte der Funktionen und Relationen werden schon im ersten Kapitel eingeführt. Dies geschieht aber sehr knapp. Der einzige Zweck, sie so früh einzuführen, ist, sie für Beispiele in den folgenden drei Kapiteln bereitzustellen. In den beiden Kapiteln 5 und 6 werden diese Begriffe nun im Detail behandelt. Kapitel 5 ist den Funktionen gewidmet und Kapitel 6 den Relationen. Von den Relationen ist es nur ein kleiner Schritt zu den gerichteten Graphen. Der ungerichteten Variante dieser mathematischen Struktur ist das vorletzte Kapitel 7 des Texts zugeordnet. Da ungerichtete Graphen oft auch benutzt werden können, um kombinatorische Fragestellungen zu verdeutlichen, etwa die Anzahl von Zugmöglichkeiten bei Spielen, geschieht die Einführung in die Theorie der ungerichteten Graphen zusammen mit der Einführung in die elementare Kombinatorik. Das letzte Kapitel 8 stellt schließlich einen Einstieg in die grundlegendsten mathematischen Strukturen der Algebra dar. Dies geschieht aber unter einem sehr allgemeinen Blickwinkel. Ich hoffe, dass dadurch die Verwendung allgemeiner mathematischer Strukturen gut vorbereitet wird.

Ich habe mich in diesem Text dazu entschieden, Mengen vor der formalen mathematischen Logik zu behandeln. Dies hat den Vorteil, dass dadurch die in der Mathematik immer wieder verwendeten logischen Verknüpfungen und deren Grundeigenschaften gut herausgearbeitet werden können. Weiterhin kann man durch das Vorgehen demonstrieren, dass durchaus auch in der Umgangssprache logisch argumentiert werden kann, vorausgesetzt man drückt sich präzise aus. Schließlich stehen durch die Mengen bei der Einführung einer formalen logischen Sprache genügend viele mathematische Objekte zur Formulierung von Beispielen zur Verfügung, und man kann auch sofort die in der mathematischen Praxis normalerweise verwendeten Kurzschreibweisen erklären. Nachteilig an der Vorgehensweise ist, dass die Logik des gesunden Menschenverstandes vielleicht doch nicht von allen Menschen in derjenigen Präzision verstanden und angewendet wird, wie es für Mathematik notwendig ist. Auch lassen umgangssprachliche Argumentationen die verwendeten Schlüsse oft nicht so deutlich erkennen wie Regelanwendungen in der formalen logischen Sprache. Deswegen gibt es viele Mathematikbücher, in denen die Sprache der Logik vor der Sprache der Mengenlehre behandelt wird. Teilweise werden diese beiden Grundpfeiler der Mathematik auch verschränkt eingeführt.

Mit Ausnahme von Kapitel 4 endet jedes Kapitel mit einem kurzen Abschnitt und schließlich einer Reihe von Übungsaufgaben. Diese speziellen Abschnitte vor den Übungsaufgaben sind für das weitere Vorgehen im Stoff nicht wesentlich, aber hoffentlich hilfreich. Sie runden nämlich unter bestimmten Blickwinkeln die einzelnen Themen in informeller Weise ab und zeigen auch auf, wo und wie die Themen in späteren Studienabschnitten wieder aufgegriffen werden. Der entsprechende Abschnitt von Kapitel 4 ist dem Finden von Beweisen gewidmet. Dies geschieht durch das Aufzeigen von Vorgehensweisen, die helfen können, einen Beweis zu finden. Sie werden mittels vieler Beispiele verdeutlicht, und das macht den Abschnitt im Vergleich zu den anderen ergänzenden Abschnitten wesentlich umfangreicher.

Der vorliegende Text basiert auf einem handschriftlichem Manuskript von mir, das von E. Lurz im Wintersemester 2010/2011 in LaTeX gesetzt wurde und das ich anschließend weiter entwickelte. Die Gliederung und Stoffauswahl zur Vorlesung erfolgte in enger Zusammenarbeit mit Kollegen des Instituts für Informatik, insbesondere mit Herrn A. Srivastav. Bei der Weiterentwicklung des Texts wurde ich von Frau B. Langfeld, Frau I. Stucke und den Herren N. Danilenko und L. Kliemann unterstützt, bei denen ich mich, wie auch bei Herrn Srivastav, sehr herzlich bedanke. Auch bedanken möchte ich mich bei C. Giessen, L. Kuhlmann, S. Reif, C. Robenek, C. Roschat und G. Schmidt für das Lesen von Vorversionen und Verbesserungshinweise. Ich bedanke mich schließlich noch sehr herzlich beim Verlag Springer Vieweg, insbesondere bei Frau Sybille Thelen, für die sehr angenehme Zusammenarbeit, sowie bei meiner Frau Sibylle für ihre Unterstützung und Hilfe.

Kiel, im Juli 2014 Rudolf Berghammer.

Inhalt