Zahlen, Formeln, Gleichungen

Albrecht Beutelspacher

Zahlen, Formeln, Gleichungen

Algebra für Studium und Unterricht

Mit 43 Abbildungen

Springer Spektrum

Albrecht Beutelspacher
Mathematisches Institut
Justus-Liebig-Universität Gießen
Gießen, Deutschland

ISBN 978-3-658-16105-7 ISBN 978-3-658-16106-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-16106-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzeburch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Ich erinnere mich gut: Die Studentin hatte einen Termin mit mir vereinbart, um ihre Klausur einzusehen. Da an dieser aber fast nichts auszusetzen war, hatten wir noch Zeit und so fragte ich sie, wie sie mit dem Studium zurechtkomme. Auch das war problemlos.

Aber dann holte sie Luft, wartete einen Augenblick und fragte: „Darf ich Sie mal was fragen?“ „Klar.“ Offenbar hatte sie etwas auf dem Herzen. „Also, es geht um die Algebra. In der Schule mochte ich das – obwohl viele meiner Mitschülerinnen und Mitschüler der Algebra hilflos und ohnmächtig gegenüberstanden. Mir gefiel es. Das Rechnen mit Zahlen, der Umgang mit Variablen, das Lösen von Gleichungen, das alles konnte ich und mochte ich. Aber jetzt kommt die Vorlesung Algebra und da hatte ich, ehrlich gesagt, gedacht, dass das etwas echt Schönes sein würde. Aber alle Studierenden machen mir Angst und warnen mich. Sie sagen, Algebra sei unfassbar abstrakt, furchtbar schwierig und hätte mit dem Schulstoff gar nichts zu tun. Viele ältere Lehramtsstudierende erzählen mir, dass sie alles Mögliche auf sich genommen haben, nur um der Algebra zu entgehen.“

Zum Glück musste die Studentin Luft holen und gab mir dadurch Gelegenheit ihr zu erwidern: „Das stimmt überhaupt nicht! Algebra ist nicht nur eines der ältesten, sondern auch eines der modernsten Gebiete der Mathematik. Schon zu Beginn der Mathematik waren algebraische Themen von Bedeutung, und in der modernen Mathematik spielt die Algebra eine unverzichtbare Rolle. Sie zeigt in eindrucksvoller Weise, zu welchen Höchstleistungen der menschliche Geist fähig ist und welche geistigen Abenteuer . . . “

Nun musste ich Luft holen und die Studentin nutzte diese Chance. Dass ich auf ihre Vorwürfe mit keinem Wort eingegangen war, störte sie nicht. Sie musste etwas loswerden: „Das stimmt vielleicht für Sie – aber die Studierenden erleben das ganz anders. Angeblich ist das alles nur toter Formelkram, und sinnloses Herum-ixen, das nichts mit unserer Welt zu tun hat.“

Sie machte eine Pause und ich war drauf und dran zu erwidern, dass sich in der Algebra die Schönheit der mathematischen Sprache besonders deutlich zeige, dass die Formeln keineswegs inhaltsleer seien und dass die Algebra spektakuläre Anwendungen habe. Das tat ich aber nicht. Sondern ich fragte sie: „Wie würden Sie sich denn eine Algebra-Vorlesung vorstellen? Was würden Sie sich wünschen? Was würden Sie weglassen?“

„Keine Ahnung! Das ist doch Ihr Job“, gab sie ein bisschen patzig zur Antwort. Aber dann machte auch sie eine Wende: „Ich würde zunächst einfach gerne verstehen, um was es geht und welche Ideen dahinter stecken. Außerdem interessiert mich, warum die Menschen sich das ausgedacht haben. Warum die Algebra immer wichtig war. Und auch, warum zum Beispiel Sie begeistert davon sind.“

Ich versuchte den Faden aufzunehmen und laut zu denken: „Grundlegende Idee. Einbettung der Algebra in die Kultur. Verstehen, Aufgreifen der Schulmathematik? Aber dann müsste sich auch die Methode ändern; ich könnte mir vorstellen, dass die Studierenden ganz anders mitarbeiten als in einer klassischen Vorlesung.“ Nun bekam ich aber Angst vor meiner eigenen Courage: „Das wäre ein Programm für eine neue Art Vorlesung.“

Die Studentin war um eine Antwort nicht verlegen: „Na und? Machen Sie es doch!“ Und fügte verschwörerisch hinzu, „Ich glaube, Sie können das . . . “

Dieses Gespräch wirkte in mir nach, ich nahm den Impuls auf und hielt mehrfach Vorlesungen für Lehramtsstudierende über Algebra, in denen ich versuchte, möglichst viel von den Visionen umzusetzen. Dieses Buch ist in gewissem Sinne die Antwort auf die Frage der Studentin.

Warum Algebra?

Bei der Arbeit an diesem Buch haben mich unter anderem folgende Fragen und Aspekte begleitet.

Algebra bietet Orientierung.

Mit Hilfe von Zahlen haben sich Menschen die Welt erschlossen und gestaltet, und wir tun das heute mehr denn je. Mit Gleichungen werden Beziehungen zwischen Zahlen hergestellt und damit die entsprechenden Beziehungen in der realen Welt aufgenommen.

Eine erste große Herausforderung war, einen Kalender zu machen. Dazu musste man Tage, Monate und Jahre in eine zahlenmäßige Beziehung bringen und dafür musste man sehr genau rechnen können; diese Notwendigkeit stimulierte die Entwicklung von guten Zahlendarstellungen. Heute stehen verschiedenartige Anwendungen der Algebra im Fokus, besonders spektakulär sind die Anwendungen in der Kryptographie.

Schon zu Beginn der Mathematik kam aber auch die Frage nach einer Orientierung innerhalb der Welt der Zahlen auf. Dazu hat man zunächst bestimmte Zahlensorten betrachtet, zum Beispiel Quadratzahlen, Dreieckszahlen oder Primzahlen. Dann hat man neue Zahlen entdeckt, wie etwa irrationale Zahlen, später negative und imaginäre Zahlen. Dabei konnte man von Anfang an eine Erfahrung machen, nämlich, dass in scheinbar einfachen Zahlen oft tiefe Geheimnisse verborgen sind.

Algebra ist ein Präzisionsinstrument des Denkens.

In allen Bereichen der Algebra, sei es beim Rechnen, sei es beim Lösen von Gleichungen, sei es bei der Erforschung der Geheimnisse der Zahlen, hat sich eines gezeigt: Um die Phänomene angemessen zu erfassen und um überhaupt irgendetwas „rauszukriegen“, muss man sich präzise ausdrücken, man muss die Sachverhalte „auf den Punkt bringen“, man braucht treffende Formulierungen. Das heißt: Die Entwicklung der mathematischen

Sprache ist ein wesentlicher Teil der Algebra. Heute zeigt sich die mathematische Sprache in der Algebra in Reinkultur!

Mit dem Instrument der Algebra kann man wahre Edelsteine entdecken, die zum unauslöschlichen Kulturgut der Menschheit gehören, zum Beispiel: Die Unendlichkeit der Primzahlen, die Irrationalität von $\sqrt{2}$, das Dezimalsystem, der Nachweis der Unlösbarkeit der antiken Probleme, die Transzendenz von Zahlen, Cantors Diagonalverfahren, der Fundamentalsatz der Algebra, die Auflösbarkeit von Gleichungen.

Algebra bietet Weitblick durch Theorie.

Zum Beispiel führt der Versuch, irrationale Zahlen zu verstehen, fast zwangsläufig auf Gleichungen, damit auf algebraische Zahlen, und dann liegen auch Körpererweiterungen nahe. Mit diesem Instrument kann man vergleichsweise einfach die Unlösbarkeit der antiken Probleme zeigen.

Auch von Menschen erfundene Konstrukte wie das Stellenwertsystem und die Null haben eine Auswirkung, die sicher für Ihre Erfinder vor Tausenden von Jahren in Babylonien und Indien nicht vorhersehbar war.

Für wen ist dieses Buch?

Dieses Buch soll zukünftigen (und gegenwärtigen) Lehrerinnen und Lehrern dazu dienen, sich wertschätzend mit der Algebra auseinanderzusetzen – in der Hoffnung, dass dies Auswirkungen auf die inhaltliche Ausprägung und didaktische Gestaltung des zukünftigen Unterrichts hat. In dem Buch haben Sie als Leserin oder Leser einen verlässlichen Partner. Sie werden ernst genommen, und zwar sowohl in Ihrem Lernwillen als auch bei Ihren Lernschwierigkeiten.

Stellen Sie sich vor, dass wir eine gemeinsame Wanderung machen. Wir beginnen auf mäßiger Höhe und gehen zunächst auf ebenen und gut ausgebauten Wegen voran. Schon da können wir faszinierende Entdeckungen machen und Ausblicke auf unerreichbare Gegenden genießen. Später geht es mitunter etwas steiler bergan, manchmal muss man einen großen Schritt machen oder sich der Erfahrung eines Bergführers anvertrauen. Auf dieser größeren Höhe eröffnen sich uns noch faszinierendere Ausblicke, wir können aber auch zurückblicken und unsere anfänglichen Schritte von der höheren Warte aus einordnen.

Etwas nüchterner gesagt: Das Buch beginnt mit Einfachem und Elementarem und schreitet dann, ganz automatisch, zu Komplexerem und Schwierigerem voran. Aber Achtung! Sie werden nicht die strenge logische Abhandlung in Reinkultur finden, bei der eines aus dem anderen folgt und bei der man B nicht verstehen kann, wenn man A nicht verstanden hat. Der Grund ist einfach: Dieser Aufbau (den die Mathematiker ausgesprochen lieben) entspricht nicht dem Weg des Lernens.

Sie wissen und können nämlich schon viel. An zahlreichen Stellen werden Sie an Ihr Wissen und Ihre Fähigkeiten erinnert. Ihr Wissen und Ihre Fähigkeiten werden erweitert und vertieft. Zum Beispiel werden Sie häufig die Gelegenheit haben, ein Beispiel zu durchdenken, *bevor* die Definition oder der Satz eingeführt wurde. Dem Mathematiker sträuben sich dabei die Haare und er wird einwenden: Wenn wir noch nicht definiert haben, worüber wir sprechen, wie können wir denn dann überhaupt darüber sprechen? Sie werden aber merken, dass die sich anschließende formale Definition, der Satz oder der Beweis durch das Beispiel gedanklich schon auf den Weg gebracht wurde. In jedem Fall ist das Buch durchgängig verständlich und zugänglich.

Zu diesem Ansatz gehört auch, dass die *Aufgaben* im Text stehen und nicht separat am Ende eines Kapitels. Denn die Arbeit mit diesem Buch besteht darin, dass Lesen und Lösen, Aufnahme von Information und ihre Verarbeitung, Verstehen und Weiterdenken ineinandergreifen. Die Aufgaben („Zur Festigung des Gelernten" oder „zur Vorbereitung des Folgenden") stehen genau an den Stellen, an denen sie bearbeitet werden sollen. Sie haben die Gelegenheit, mit insgesamt über 250 Aufgaben selbständig die Welt der Algebra zu ergründen! Lösungshinweise finden Sie am Ende des Buches.

Inhaltlich setzt dieses Buch bei der Schulalgebra an, insbesondere auch bei der Algebra in der Sekundarstufe 1. Denn in der Schule findet Algebra hauptsächlich in der Sekundarstufe 1 statt. Insofern ist dieses Buch auch – in großen Teilen – zur Ausbildung von Realschullehrerinnen und -lehrern geeignet, ja man könnte auf Grundlage des Buches sogar einen gemeinsamen Algebra-Kurs für Sek 1- und Sek 2-Studierende gestalten.

Das Buch beginnt mit der Erkundung der natürlichen und ganzen Zahlen. An die Untersuchung der Teilbarkeit schließt sich das Rechnen mit Resten an. In der Schule spielen Bruchzahlen eine große Rolle; daher werden wir diese gründlich behandeln. Ein historisch und sachlich entscheidender Schritt der Algebra war die die Entdeckung der irrationalen Zahlen. Diese führen uns zu Gleichungen und ihrer Lösbarkeit und damit zu den algebraischen Zahlen. Auf dieser Ebene kann man die Frage nach der Lösbarkeit der antiken Probleme, zum Beispiel die Fragen nach der Verdoppelung eines Würfels oder der Quadratur des Kreises beantworten. Gegen Ende des Buches werden wir uns mit der Lösung von Gleichungen im Allgemeinen beschäftigen. Dabei wird sowohl der Fundamentalsatz der Algebra thematisiert, der sagt, dass jede Gleichung jedenfalls mit komplexen Zahlen lösbar ist, als auch die Erkenntnis, dass längst nicht jede Gleichung durch einen „Wurzelausdruck" (wie wir ihn beispielsweise von der p,q-Formel kennen) gelöst werden kann.

Bei diesem Aufbau werden auch strukturmathematische Überlegungen relevant werden. Sie sind unvermeidlich, ergeben sich natürlich und sind außerordentlich hilfreich. Wir werden sowohl Gruppen als auch Körpererweiterungen behandeln.

Dazu kommen Abschnitte über Kryptographie und Codes, die zeigen, dass Algebra in sehr konkreter Weise mit unserem modernen Leben verbunden ist.

Dieser Aufbau der Algebra impliziert eine neue Akzentuierung des Stoffes. Wir behandeln die Arithmetik sehr ausführlich. Das bezieht sich einerseits auf die Zahlentheorie, andererseits auf die Behandlung der Stellenwertsysteme. Auch die rationalen und irrationalen Zahlen werden eingehend dargestellt. Dafür wird die Galois-Theorie, ein Höhepunkt der üblichen Algebra-Vorlesungen, nur kursorisch behandelt; dadurch wird auch der Anteil der Gruppentheorie im Vergleich zum Üblichen reduziert.

In diesem Buch finden Sie häufig Bezüge zur *Geschichte* der Mathematik und zur *Didaktik*. Es ist natürlich kein Buch über Geschichte der Mathematik oder Didaktik der

Algebra, es ist aber anschlussfähig an beide Gebiete. Die zahlreichen geschichtlichen Verweise zeigen außerordentlich deutlich, dass Algebra eine Wissenschaft ist, die weltweit entstanden ist und weltweit entwickelt wurde.

Kaum ein anderes Gebiet der Mathematik hat eine so spannende *Geschichte*: Die Entdeckung der Irrationalität bei den Griechen, die Lösung von quadratischen Gleichungen in Mesopotamien, die Erfindung der Null in Indien, der Kampf um die Gleichung 3. Grades in Italien, die Unauflösbarkeit der Gleichung 5. Grades in Norwegen und Frankreich: Jedes einzelne Thema ist Stoff für einen Roman!

Dieses Buch ist für Sie, die *Studierenden*, geschrieben, und ich habe mir Mühe gegeben, es so zu schreiben, dass es einfach zu lesen ist. Aber *lesen müssen Sie*!

In der Mathematik heißt *lesen* nicht überfliegen, es heißt auch nicht: mal reinschauen, und es heißt schon gar nicht: nur durchblättern. In der Mathematik heißt lesen zunächst mal: Tempo rausnehmen, langsam lesen, manchmal Buchstabe für Buchstabe, Zeichen für Zeichen. Zum zweiten heißt Lesen in der Mathematik: aufmerksam sein: was bleibt bei einer Umformung gleich, was ändert sich?

Zusammenfassend kann man folgendes sagen (vgl. hierzu Beutelspacher et al. 2011, insbesondere Abschn. 7.2):

Dieses Buch behandelt die Schulalgebra von einem höheren Standpunkt, der den Studierenden Einsicht vermittelt. Es bietet Breite und Tiefe und stellt eine inhaltliche Neuorientierung dar.

Durch die Elementarität des Vorgehens haben Sie die Möglichkeit, sich den Stoff und die Methoden anzueignen und – auf entsprechendem Niveau – selbst zu erarbeiten und so den Prozess des Mathematikmachens zu erleben.

An zahlreichen Stellen bietet das Buch Ausblicke zu Anwendungen und gewährt Ihnen Eindrücke von der Tiefe der Mathematik.

Dank

Mein Dank gilt vielen Menschen: Zunächst den Studierenden, die mir immer wieder Impulse gegeben haben und meine Versuche, neue Ideen in der Lehre auszuprobieren, stets mit Geduld mitgetragen haben.

Ich danke Laila Samuel für viele Gespräche und die wunderbaren Zeichnungen. Ebenso danke ich Nina Stein, die das Manuskript außerordentlich sorgfältig gelesen und damit die Leserinnen und Leser vor vielen Unklarheiten und Fehlern bewahrt hat.

Schließlich gilt ein großer Dank meiner Lektorin, Frau Schmickler-Hirzebruch, die mich nun ein wissenschaftliches Leben lang begleitet hat und stets eine inspirierende und zuverlässige Partnerin bei der Planung und Realisierung von Büchern war.

Ein besonderer Dank gilt drei weiteren Frauen, die mir immer vor Augen stehen, wenn ich über Mathematik schreibe (und die davon übrigens nichts ahnen). Deren unausgesprochene, aber warmherzige Ermutigung, verbunden mit einem ebenso unausgesprochenen, aber außerordentlich klaren Qualitätsanspruch waren und sind mir stets ein Ansporn.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G.: Mathematik neu denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Vieweg & Teubner, Wiesbaden (2011)

Inhaltsverzeichnis