
BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.

Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Christoph Lohmann

Galerkin-Spektralverfahren für die Fokker-Planck- Gleichung

 Springer Spektrum

Christoph Lohmann
Dortmund, Deutschland

BestMasters

ISBN 978-3-658-13310-8

ISBN 978-3-658-13311-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-13311-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Vorwort

Der Lehrstuhl für Angewandte Mathematik und Numerik (LS III) der Fakultät Mathematik an der Technischen Universität Dortmund beschäftigt sich unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Stefan Turek und Herrn Prof. Dr. Dmitri Kuzmin im Bereich des Wissenschaftlichen Rechnens mit der Numerik für Partielle Differentialgleichungen. Hierbei stehen unter anderem die Aspekte von effizienten Lösungsverfahren im Bezug auf hardwareorientierten Implementierungen sowie die Sicherstellung physikalischer Eigenschaften im Fokus der Forschung. Letzterer Forschungsschwerpunkt diskutiert beispielsweise positivitätserhaltende Finite-Elemente-Approximationen oder die Vermeidung künstlicher Oszillationen.

In diesem Zusammenhang entstand das Themengebiet der Feinstrukturmodellierung von Fasersuspensionen und die im Wintersemester 2014/15 verfasste und in diesem Werk veröffentlichte Masterarbeit mit dem Titel „*Physikkonforme Galerkin-Verfahren zur Simulation der Orientierungszustände in Fasersuspensionen*“.

Da das Fließverhalten von Fasersuspensionen auf der lokalen Zusammensetzung der Mixtur sowie den Orientierungen der mikroskopischen Fibern aufbaut, wird in bewährten Modellen eine makroskopische Verteilungsfunktion eingeführt und Kopplungen der verschiedenen Phasen mittels sogenannter Orientierungstensoren beschrieben. Diese müssen aus physikalischen Gründen die Eigenschaften der positiven Semidefinitheit und der normierten Spur bewahren. In dieser wissenschaftlichen Arbeit werden aus diesem Grund die Tensoren unter besonderer Berücksichtigung der Definitheit untersucht, entsprechende Bedingungen hergeleitet und numerische Korrekturverfahren aufgestellt. Die dabei entstandenen Methoden lassen sich ohne Beschränkungen auch auf andere Modelle mit tensoriellen Größen übertragen.

Die Arbeit wurde betreut durch Herrn Prof. Dr. Dmitri Kuzmin, der mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite stand und die Publizierung initiiert hat. Aus diesem Grund gilt ihm ein besonderer Dank.

Bedanken möchte ich mich außerdem beim gesamten Lehrstuhl für die besondere Arbeitsatmosphäre. Dieser hat mich eine lange Zeit während meines Studiums begleitet und damit die Entstehung dieses Werkes erst ermöglicht und mitbeeinflusst.

Christoph Lohmann

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	VII
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
2 Grundlage	5
2.1 Herleitung des Modells	5
2.2 Formelsammlung auf der Sphäre \mathbb{S}^1	10
2.3 Fehlerabschätzungen für die abgeschnittene Fourierreihe	12
3 Eigenschaften der Orientierungsverteilungsfunktion	15
3.1 Orientierungstensor zweiter Ordnung	23
3.2 Orientierungstensor vierter Ordnung	24
3.3 Weitere verallgemeinerte Orientierungstensoren	26
4 Galerkin-Verfahren zur Diskretisierung der Fokker-Planck-Gleichung	31
4.1 Trennung der Variablen	31
4.2 Behandlung der ortsunabhängigen Fokker-Planck-Gleichung	34
4.2.1 Korrektur mittels Minimierungsproblem	37
4.2.2 Korrektur mittels künstlicher Diffusion	40
4.2.3 Korrektur mittels Projektion auf lineare Finite-Elemente	43
4.3 Behandlung der Konvektionsgleichung	43
5 Numerische Beispiele bzw. Anwendung	49
5.1 Ortsunabhängige Fokker-Planck-Gleichung	50
5.1.1 Ebene Dehnströmung	53
5.1.2 Scherströmung	76
5.2 Ortsabhängige Fokker-Planck-Gleichung	84
6 Zusammenfassung und Ausblick	89
Literaturverzeichnis	93

Abbildungsverzeichnis

1.1	Produktionslinie „Perlen PM 7“ der Firma „Voith Paper GmbH“ . . .	2
2.1	Koordinatensystem der Orientierung $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$	7
3.1	Veranschaulichung des Gibbs'schen Phänomens	18
5.1	Analytische Lösung der ebenen Dehnströmung	54
5.2	Vergleich der Vorkonditionierer $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{I}$ und $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$	58
5.3	Fehlerverlauf für Crank-Nicolson-Verfahren zur Ordnung $N_{\mathbf{p}} = 5000$	59
5.4	Verteilungsfunktion numerischer Verfahren zur Simulation der ebenen Dehnströmung	63
5.5	Orientierungstensoren numerischer Verfahren zur Simulation der ebenen Dehnströmung	64
5.6	Finale Verteilungsfunktion und \mathcal{L}^2 -Fehler der ebenen Dehnströmung	69
5.7	Minimaler Eigenwert und Fehlernorm von \mathbb{A}_2 am Beispiel der ebenen Dehnströmung	71
5.8	Minimaler Eigenwert und Fehlernorm von \mathbb{A}_4 am Beispiel der ebenen Dehnströmung	73
5.9	Analytische Lösung der Scherströmung	79
5.10	Finale Approximation der Scherströmung	79
5.11	Numerische Verfahren zur Simulation der Scherströmung	81
5.12	Simulation der ortsabhängigen Fokker-Planck-Gleichung	86

Tabellenverzeichnis

3.1	Anzahl unabhängiger Komponenten der Orientierungstensoren . . .	19
5.1	Exakte Fourierkoeffizienten der ebenen Dehnströmung	56
5.2	Konvergenz der abgeschnittenen Fourierreihe der ebenen Dehnströmung	57
5.3	Numerische Verfahren zur Simulation der ebenen Dehnströmung . .	65
5.4	Konvergenz numerischer Verfahren zur Simulation der ebenen Dehnströmung zur Zeit $t = 50$	75
5.5	Konvergenz numerischer Verfahren zur Simulation der ebenen Dehnströmung zur Zeit $t = 200$	77
5.6	Konvergenz der abgeschnittenen Fourierreihe der Scherströmung . .	83
5.7	Konvergenz des numerischen Verfahrens zur Simulation der Scherströmung zu unterschiedlichen Zeitpunkten	85