
Springer Studium Mathematik – Bachelor

Herausgegeben von

M. Aigner, Freie Universität Berlin, Berlin, Germany

H. Faßbender, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, Germany

B. Gentz, Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany

D. Grieser, Universität Oldenburg, Oldenburg, Germany

P. Gritzmann, Technische Universität München, Garching, Germany

J. Kramer, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, Germany

V. Mehrmann, Technische Universität Berlin, Berlin, Germany

G. Wüstholtz, ETH Zürich, Zürich, Switzerland

Die Reihe „Springer Studium Mathematik“ richtet sich an Studierende aller mathematischen Studiengänge und an Studierende, die sich mit Mathematik in Verbindung mit einem anderen Studienfach intensiv beschäftigen, wie auch an Personen, die in der Anwendung oder der Vermittlung von Mathematik tätig sind. Sie bietet Studierenden während des gesamten Studiums einen schnellen Zugang zu den wichtigsten mathematischen Teilgebieten entsprechend den gängigen Modulen. Die Reihe vermittelt neben einer soliden Grundausbildung in Mathematik auch fachübergreifende Kompetenzen. Insbesondere im Bachelorstudium möchte die Reihe die Studierenden für die Prinzipien und Arbeitsweisen der Mathematik begeistern. Die Lehr- und Übungsbücher unterstützen bei der Klausurvorbereitung und enthalten neben vielen Beispielen und Übungsaufgaben auch Grundlagen und Hilfen, die beim Übergang von der Schule zur Hochschule am Anfang des Studiums benötigt werden. Weiter begleitet die Reihe die Studierenden im fortgeschrittenen Bachelorstudium und zu Beginn des Masterstudiums bei der Vertiefung und Spezialisierung in einzelnen mathematischen Gebieten mit den passenden Lehrbüchern. Für den Master in Mathematik stellt die Reihe zur fachlichen Expertise Bände zu weiterführenden Themen mit forschungsnahen Einblicken in die moderne Mathematik zur Verfügung. Die Bücher können dem Angebot der Hochschulen entsprechend auch in englischer Sprache abgefasst sein.

Weitere Bände dieser Reihe finden sie unter
<http://www.springer.com/series/13446>

Folkmar Bornemann

Numerische lineare Algebra

Eine konzise Einführung
mit MATLAB und Julia

 Springer Spektrum

Folkmar Bornemann
Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Garching, Deutschland

Springer Studium Mathematik – Bachelor
ISBN 978-3-658-12883-8
DOI 10.1007/978-3-658-12884-5

ISBN 978-3-658-12884-5 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

The trouble with people is not that they don't know but that they know so much that ain't so.

(Josh Billings 1874)

Vieles hätte ich verstanden
– hätte man es mir nicht erklärt.

(Stanislaw Jerzy Lec 1957)

An expert is someone who has made all the mistakes which can be made in a narrow field.

(Niels Bohr 1954)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^1 y_1 + C_1 = 0 \\ \alpha_1^1 y_1 + \alpha_1^2 y_2 + C_2 = 0 \\ \alpha_1^1 y_1 + \alpha_2^2 y_2 + \alpha_1^3 y_3 + C_3 = 0 \\ \dots \\ \alpha_1^1 y_1 + \alpha_2^2 y_2 + \alpha_3^3 y_3 + \dots + \alpha_n^n y_n + C_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^1 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n^n \lambda_n - Y_1 = 0 \\ \alpha_2^2 \lambda_2 + \alpha_3^3 \lambda_3 + \dots + \alpha_n^n \lambda_n - Y_2 = 0 \\ \alpha_3^3 \lambda_3 + \dots + \alpha_n^n \lambda_n - Y_3 = 0 \\ \dots \\ \alpha_n^n \lambda_n - Y_n = 0 \end{array} \right.$$

unteres und adjungiertes oberes Dreieckssystem aus dem **Manuskript*** von A.-L. Cholesky (1910), vgl. §8.3

* « Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires », Fonds André-Louis Cholesky (1875-1918), Abdruck mit freundlicher Genehmigung der Archives de l'École Polytechnique, Palaiseau, Frankreich.

Vorwort

Das vorliegende Buch entstand aus einem Skript zur Vorlesung *Einführung in die numerische lineare Algebra*, die an der TU München zweistündig im dritten Semester des Bachelorstudiengangs Mathematik gelesen wird: Anhand grundlegender Problemstellungen der linearen Algebra soll in das algorithmisch-numerische Denken eingeführt werden. Die Beschränkung auf die lineare Algebra sichert dabei eine stärkere thematische Kohärenz als sie sonst in einführenden Vorlesungen zur Numerik zu finden ist. Neben diesen didaktischen Aspekten sind die vermittelten Konzepte und Algorithmen aber von ganz grundsätzlicher Bedeutung für die numerische Praxis und sollten möglichst frühzeitig beherrscht werden.

Meine Darstellung betont die Zweckmäßigkeit der Blockpartitionierung von Vektoren und Matrizen gegenüber einer klassischen, komponentenweisen Betrachtung. So erhalten wir nicht nur eine übersichtlichere Notation und kürzere Algorithmen, sondern werden angesichts von Vektorprozessoren und hierarchischen Speicherarchitekturen moderner Computer auch zu signifikanten Laufzeitgewinnen geführt. Das Motto lautet daher:

Die höhere Abstraktionsstufe gewinnt.

Beim Thema *Fehleranalyse* ziele ich kompromisslos auf größtmögliche konzeptionelle Schärfe: Nur so erlernt man wirklich hohe Kompetenz in der Beurteilung numerischer Verfahren; anderes (z.B. irgendwelche „Faustregeln“) führt nur zu unzuverlässigem, kostenträchtigem und – zuweilen **gefährlichem** – Halbwissen.

Die Algorithmen und begleitenden numerischen Beispiele werden in der im universitären Unterricht verbreiteten Programmierumgebung **MATLAB** angegeben, zusätzlich aber auch im Anhang **B** in der zukunftsweisenden, frei zugänglichen Programmiersprache **Julia** vom **MIT**. Ich verbinde damit die Hoffnung, dass die Lektüre meines Buchs zu weiteren Computerexperimenten anregt.

Das begleitende E-Buch bietet als hypertextualisiertes PDF-Dokument am Computer zusätzliche Inhalte: **Interne Verweise** sind blau, **externe Verweise** rot markiert. Letztere führen auf Erläuterungen von Begriffen und Sachverhalten, die ich als bekannt voraussetzen möchte, oder auf weiterführendes Material wie etwa webbasierte, computergestützte Rechnungen und historische Informationen.

München, im Januar 2016

Folkmar Bornemann
bornemann@tum.de

Laboratorium

Zur Vertiefung der Lektüre empfehle ich, sich ein Laboratorium einzurichten:

Werkzeug 1: Programmierumgebung Wegen ihrer gegenwärtig hohen Verbreitung in universitärer Lehre und industrieller Praxis verwende ich im Buch die Skriptsprache der numerische Entwicklungsumgebung **MATLAB** der Firma **The MathWorks**. Als zukunftsweisende, frei zugängliche Alternative empfehle ich jedoch die Programmiersprache **Julia** vom **MIT**, für die ich deshalb im Anhang **B** alle Programme des Buchs erneut zusammengestellt habe.

Werkzeug 2: Rechenknecht Ich werde mich auf Ideen und Konzepte konzentrieren und daher nicht mit Rechnungen aufhalten, die aufgrund ihrer handwerklichen Natur auch von einem „Rechenknecht“ übernommen werden könnten. Hierfür eignen sich **Computeralgebrasysteme** wie Maple oder Mathematica; zu letzterem gibt es über **Wolfram Alpha** einen kostenfreien „einzeiligen“ Zugang im Internet. Beispiele finden sich mit externen Links (rot) in §§14.2 und 14.3.

Werkzeug 3: Lehrbuch X Um sich den Stoff aus einer weiteren Perspektive erklären zu lassen, sollte ein passendes „X“ stets in Griffweite liegen; hier ein paar Empfehlungen aus der *angelsächsischen* Literatur:

- Peter Deuffhard, Andreas Hohmann: *Numerical Analysis in Modern Scientific Computing*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2003.
Schulbildend; laut Vorwort formte mein jugendlicher Elan die Darstellung der Fehleranalyse.
- Lloyd N. Trefethen, David Bau: *Numerical Linear Algebra*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.
Ein sehr lebendig geschriebenes Lehrbuch, inzwischen ein Klassiker.
- James W. Demmel: *Applied Numerical Linear Algebra*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.
Tiefgehend und ausführlicher als der Trefethen–Bau, ebenfalls ein Klassiker.
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan: *Matrix Computations*, 4th edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore 2013.
Die „Bibel“ zum Thema.
- Nicholas J. Higham: *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, 2nd edition, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.
Das umfassende moderne Standardwerk zur Fehleranalyse.
- Roger A. Horn, Charles R. Johnson: *Matrix Analysis*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge 2012.
Der Klassiker zur Matrixtheorie; sehr umfassend und dicht, eine Standardreferenz.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	vii
Laboratorium	viii
I Matrizen am Computer	I
1 Was ist Numerik?	1
2 Matrizenkalkül	2
3 MATLAB	8
4 Laufzeiten	10
5 Dreiecksmatrizen	14
6 Unitäre Matrizen	18
II Matrixfaktorisierung	21
7 Dreieckszerlegung	21
8 Cholesky-Zerlegung	28
9 <i>QR</i> -Zerlegung	31
III Fehleranalyse	39
10 Fehlermaße	40
11 Kondition eines Problems	41
12 Maschinenzahlen	47
13 Stabilität eines Algorithmus	50
14 Beispielanalysen	54
15 Analyse linearer Gleichungssysteme	60
IV Kleinste Quadrate	67
16 Normalgleichung	67
17 Orthogonalisierung	70
V Eigenwertprobleme	73
18 Grundbegriffe	73
19 Störungstheorie	76
20 Vektoriteration	78
21 <i>QR</i> -Iteration	84
Anhang	95
A MATLAB – Eine ganz kurze Einführung	95

B	Julia – eine moderne Alternative zu MATLAB	101
C	Normen – Wiederholung und Ergänzung	115
D	Das Householder-Verfahren zur QR -Zerlegung	119
E	Für Neugierige, Kenner und Könner	121
	Rückwärtsanalyse eines Modells der Nachiteration	121
	Globale Konvergenz der QR -Iteration ohne Shift	121
	Lokale Konvergenz der QR -Iteration mit Shift	124
	Stochastische obere Abschätzung der Spektralnorm	128
F	Weitere Aufgaben	131
	Notation	139
	Index	141