# Springer Studium Mathematik – Bachelor

Die Reihe „Springer Studium Mathematik" richtet sich an Studierende aller mathematischen Studiengänge und an Studierende, die sich mit Mathematik in Verbindung mit einem anderen Studienfach intensiv beschäftigen, wie auch an Personen, die in der Anwendung oder der Vermittlung von Mathematik tätig sind. Sie bietet Studierenden während des gesamten Studiums einen schnellen Zugang zu den wichtigsten mathematischen Teilgebieten entsprechend den gängigen Modulen. Die Reihe vermittelt neben einer soliden Grundausbildung in Mathematik auch fachübergreifende Kompetenzen. Insbesondere im Bachelorstudium möchte die Reihe die Studierenden für die Prinzipien und Arbeitsweisen der Mathematik begeistern. Die Lehr- und Übungsbücher unterstützen bei der Klausurvorbereitung und enthalten neben vielen Beispielen und Übungsaufgaben auch Grundlagen und Hilfen, die beim Übergang von der Schule zur Hochschule am Anfang des Studiums benötigt werden. Weiter begleitet die Reihe die Studierenden im fortgeschrittenen Bachelorstudium und zu Beginn des Masterstudiums bei der Vertiefung und Spezialisierung in einzelnen mathematischen Gebieten mit den passenden Lehrbüchern. Für den Master in Mathematik stellt die Reihe zur fachlichen Expertise Bände zu weiterführenden Themen mit forschungsnahen Einblicken in die moderne Mathematik zur Verfügung. Die Bücher können dem Angebot der Hochschulen entsprechend auch in englischer Sprache abgefasst sein.

Martin Aigner

# Graphentheorie

## Eine Einführung aus dem 4-Farben Problem

2., überarbeitete Auflage

Springer Spektrum

Martin Aigner
Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISSN 2364-2378 ISSN 2364-2386 (electronic)
Springer Studium Mathematik – Bachelor
ISBN 978-3-658-10322-4 ISBN 978-3-658-10323-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-10323-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
1. Auflage 1984: B.G.Teubner, Stuttgart


Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

# Vorwort zur ersten Auflage

In den letzten Jahren wurde ich immer häufiger von Studenten gefragt, warum sich ein mathematisches Gebiet gerade in dieser (meist in der Vorlesung vorgestellten) Weise entwickelt hat und nicht anders, was die hauptsächlichen Triebfedern waren, und wie es weitergeht. Insbesondere interessierte, neben anderen Faktoren wie Anwendbarkeit oder Querverbindungen zu anderen Gebieten, die Rolle, welche die großen klassischen Probleme bei der Entwicklung einer Theorie spielten.

Die kürzlich erfolgte ungewöhnliche Lösung des 4-Farben Problems war mir ein willkommener Anlass, den genauen Einfluss zu studieren, den dieses universell bekannte Problem vornehmlich auf die Graphentheorie hatte. Vielleicht schärfer als anderswo scheiden sich am 4-Farben Problem die Geister. Die einen sagen, die Mathematik, die das 4-Farben Problem hervorgebracht hat, ist eine Marginalie und die Lösung mit ihrem enormen Computer Einsatz ist vom ästhetischen Standpunkt aus geradezu abschreckend. Die anderen wiederum meinen, dass das 4-Farben Problem fast im Alleingang eine ganze Disziplin hat entstehen lassen, eben die Graphentheorie, wie es in diesem Umfang höchst selten vorkommt, und dass die Lösung mit ihren vielfältigen Aspekten inner- und außermathematischer Art weit in die Zukunft weist. Die Arbeit an diesem Buch hat mich überzeugt, dass die zweite Auffassung eher zutrifft – und es ist meine Hoffnung, dass mir in der Darstellung hinreichende Argumente dafür gelungen sind.

Das vorliegende Buch will zweierlei sein: Erstens eine Einführung in die Graphentheorie, welche nahezu alle wichtigen Begriffsbildungen und Resultate enthält, und zweitens eine Darstellung der Rolle, die das 4-Farben Problem in der Entwicklung der Graphentheorie spielte. Um dies zu bewerkstelligen, wurde das Buch in drei Teile gegliedert: Teil I (Introduktion), Teil II (Thema) und Teil III (Finale).

Teil I schildert den Ursprung des 4-Farben Problems, die frühen Versuche und die ersten theoretischen Ansätze, die zur Lösung entwickelt wurden. Großer Wert wird auf die Darstellung der Schwierigkeiten gelegt, die die Forscher der Frühzeit hatten, und der Sackgassen, in die sie gerieten. Dies geschah nicht so sehr, um die historische Neugier zu befriedigen, sondern um den Lesern anhand dieser Schwierigkeiten auch Wege aufzuzeigen, wie man in der eigenen mathematischen Arbeit vorankommt. Teil II ist das Kernstück des Buches. Ausgehend von den theoretischen Ansätzen der frühen Periode werden fünf wesentliche Kapitel der Graphentheorie entwickelt, die in ihrer Gesamtheit die erwähnte Einführung in die Graphentheorie darstellen. Teil III bringt schließlich eine Darstellung der endgültigen Lösung des 4-Farben Problems und eine Diskussion der dadurch aufgeworfenen Fragen. Da es sich hierbei um eine riesige Fülle von Einzelergebnissen handelt, muss diese Schilderung notgedrungen skizzenhaft ausfallen. Es ist meine Hoffnung, dass dennoch die zugrundeliegenden Ideen klar heraustreten. Wenn auch das Buch schon aus Gründen der Lesbarkeit nicht chronologisch aufgebaut ist, so lassen sich die Daten ungefähr so abstecken: Teil I umfasst etwa den Zeitraum 1850–1930, Teil II die Spanne 1930–1965 und Teil III die Jahre von 1965 an.

Soweit der Inhalt. Wie schon angedeutet wurde, lässt sich der Mittelteil nach Erläuterung der Grundbegriffe als 1-semestrige Einführung in die Graphentheorie verwenden. Jedem Kapitel sind eine Anzahl von Übungen nachgestellt. Übungen, deren Bearbeitung besonders empfohlen werden, sind mit einem $\circ$ gekennzeichnet, schwierigere

Aufgaben mit einem *. Am Ende findet der Leser eine nach Kapiteln gegliederte Literaturliste mit Hinweisen auf begleitende Lektüre.

Mein besonderer Dank geht an meine Kollegen T. Andreae und R.-H. Schulz, die die verschiedenen Kapitel in allen Phasen der Entstehung gelesen und wesentlich verbessert haben. Ferner danke ich Frau Barrett vom II. Mathematischen Institut der Freien Universität für die sorfältige Abfassung des Manuskriptes und dem Teubner Verlag für die angenehme Zusammenarbeit.

Berlin, im Oktober 1983 Martin Aigner

## Vorwort zur zweiten Auflage

Es ist eher ungewöhnlich, ein Buch nach 30 Jahren wieder aufzulegen. Im Wesentlichen gab es dafür zwei Gründe. Das Buch ist schon lange vergriffen, wird aber erfreulicherweise immer wieder nachgefragt. Zum Anderen scheint mir die Entwicklung einer Theorie aus ihren historischen Quellen, mit ihren Problemen, Ideen, Irrtümern und Erfolgen, mehr denn je eine sinnvolle und notwendige Ergänzung zum Standardkanon des Bachelorstudiums. Vielleicht war dieser letzte Punkt meine stärkste Motivation, den Text und das Konzept des Buches noch einmal zu durchdenken. Ich habe mich schließlich entschieden, den Aufbau beizubehalten und nur einige der bedeutendsten, seither gefundenen, Ergebnisse einzubauen. Viele Leser der ersten Auflage haben mir versichert, dass gerade die Ausarbeitung des Dreiklangs „Problem–Theorie–Lösung“ den 4-Farben Satz für sie so faszinierend und spannend gemacht hatte. Und genau diese Faszination wollte ich dem manchmal etwas normiert erscheinenden Bachelor-Studiengang hinzufügen, um Mathematik von Anfang als spannende Herausforderung voller Ideen und Schönheit zu vermitteln.

Das Buch ist wie in der ersten Auflage in drei Teile gegliedert: Teil I mit der Einführung in das Problem und die frühen Versuche, Teil II mit der Ausarbeitung der Graphentheorie, und Teil III mit der endgültigen Lösung. Das letzte Kapitel hat eine etwas veränderte Form. Der ursprüngliche Text wurde gestrafft, dafür enthält das Kapitel Bemerkungen zum Nachfolgebeweis des 4-Farben Satzes aus dem Jahr 1996 und einige neuere Entwicklungen. Die neue Auflage bot außerdem eine willkommene Gelegenheit, inhaltliche Passagen zu verbessern, die Notation den heute gängigen Graphen-Bezeichnungen anzupassen und die Literaturliste zu aktualisieren. Es gibt einige zusätzliche Übungen, besonders empfohlene sind mit einem Stern gekennzeichnet.

Da an mathematischer Vorbildung nur das Grundlagenstudium vorausgesetzt wird, eignet sich der Text als einsemestrige Einführung in die Graphentheorie und ebenso als Proseminar zu einer fundierten Diskussion des 4-Farben Problems. Eine 4+2-stündige Veranstaltung von 14 Wochen wurde nach folgendem Plan gehalten und hat sich bewährt:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Auszüge aus Teil I, insbesondere Grundbegriffe | 3 Wochen |
| 2. | Teil II, etwa 2 Wochen für jedes Kapitel | 10 Wochen |
| 3. | Etwas zu den Ideen aus Teil III | 1 Woche |

Die auffälligste Veränderung betrifft das Schriftbild (der Originaltext 1983 war noch mit Schreibmaschine verfasst worden!) und Layout, Fotos und Figuren. Mein herzlicher Dank geht an Margrit Barrett für die sorgfältige Abfassung des Manuskriptes und an Günter M. Ziegler für wunderbare kollegiale Unterstützung. Christina Schulz und vor allem Marie-Sophie Litz danke ich für die Erstellung der Figuren, Christoph Eyrich für die Endredaktion und Ulrike Schmickler-Hirzebruch von Springer Spektrum für die wie immer angenehme Zusammenarbeit.

Es würde mich freuen, wenn die neue Ausgabe auch fast 40 Jahre nach dem Beweis etwas von der Schönheit und ungebrochenen Faszination des 4-Farben Problems vermittelt und die daraus entstandene Graphentheorie als spannende Herausforderung, aber auch als intellektuelles Vergnügen darstellt.

Berlin, Frühling 2015 Martin Aigner

**Bildernachweis**

Die Portraits von Francis Guthrie auf Seite 4, von Percy John Heawood auf Seite 22, von George David Birkhoff auf Seite 39 und von Dénes König auf Seite 102 sind aus dem *MacTutor History Archive*.

Die Fotos von Peter Guthrie Tait auf Seite 44 und von William Thomas Tutte auf Seite 121 sind in *Wikipedia* enthalten, das Foto von Kasimierz Kuratowski auf Seite 57 und das Foto von Heinrich Heesch auf Seite 160 sind aus *Wikimedia Commons*.

Aus der Website der *Deutschen Mathematiker Vereinigung* (mathematik.de) stammt das Bild von Hassler Whitney auf Seite 135. Das Portrait von Gerhard Ringel auf Seite 27 stammt aus dem Nachruf der University of California at Santa Cruz (news.ucsc.edu), und das gemeinsame Portrait von Kenneth Appel und Wolfgang Haken auf Seite 179 findet sich im Newsletter No 46 (2002) der *European Mathematical Society*.

# Inhalt